微分積分と物理

BIBUN SEKIBUN TO BUTSURI

目　　次

１． 導関数と微分

$$\text{導関数}\quad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{df(x)}{dx}=\frac{df}{dx}$$

ディーエフ・ディーエックスと読む

導関数 $f'(x)$ を求めることを，「f を x で微分する」という

1-1　基本の導関数

$f(x)=x^n$ (nは任意の実数)のとき，　$\dfrac{df}{dx}=nx^{n-1}$

問題 1-1-1　次の①～④を求めよ。

①　$f(x)=x^2$ のとき，$\dfrac{df}{dx}=$	②　$f(x)=x$ のとき，$\dfrac{df}{dx}=$
③　$f(x)=$ 定数 のとき，$\dfrac{df}{dx}=$	④　$f(x)=x^{-1}$ のとき，$\dfrac{df}{dx}=$

1-2　位置と速度と加速度

❶位置　x 軸上を運動する場合，x 座標で表す。時刻 t の関数として $x(t)$ と表される。

問題 1-2-1　物体の時刻 t [s]における位置座標 x [m]が，$x=12+6t+0.4t^2$ と表される。この物体の時刻 $t=0$ s における位置の x 座標を求めよ。

❷速度　物体の x 座標が時刻 t の関数として $x(t)$ と表されるとき，(瞬間の)速度 v は，

きわめて短い時間 Δt について $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ で求められる。数学的に書くと，

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

<u>位置 x を時刻 t で微分した量が速度である</u>。

$\boxed{\text{問題 1-2-2}}$　物体の時刻 t [s] における位置座標 x [m] が，$x = 12 + 6t + 0.4t^2$ と表される。この物体の時刻 t [s] における速度 v [m/s] を求めよ。

❸加速度　物体の速度 v が時刻 t の関数として $v(t)$ と表されるとき，（瞬間の）加速度 a は, きわめて短い時間 Δt について $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ で求められる。数学的に書くと，

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

<u>速度 v を時刻 t で微分した量が加速度である。</u>

加速度は高次導関数を用いて，$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$　と表される。

$\boxed{\text{問題 1-2-3}}$　物体の時刻 t [s] における速度 v [m/s] が，$v = 6 + 0.8t$ と表される。この物体の時刻 t [s] における加速度 a [m/s^2] を求めよ。

$\boxed{\text{問題 1-2-4}}$　x 軸上の原点を時刻 0 に出発して等加速度運動している物体の時刻 t における位置座標 x が，$x = pt + qt^2$ と表される（p，qは定数）とき，この物体の初速度 v_0 と加速度 a を求めよ。

２．不定積分

与えられた関数$f(x)$に対して，導関数が$f(x)$に等しい関数を$f(x)$の不定積分または原始関数といい，$\int f(x)dx$ で表す。

$f(x)$の不定積分を求めることを，「$f(x)$を積分する」という。

2-1　基本の不定積分

$f(x) = x^n$ (nは-1 を除く実数)のとき，　$\int f(x)dx = \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (積分定数)

問題 2-1-1　次の①～④を求めよ。積分定数は C とする。

①　$f(x) = x^2$ のとき，$\int x^2 dx =$	②　$f(x) = x$ のとき，$\int x dx =$
③　$f(x) = a$ (定数) のとき，$\int a dx =$	
④　$f(x) = x^{-2}$ のとき，$\int x^{-2} dx =$	

問題 2-1-2　x 軸上の原点を時刻 0 に初速度 v_0 で出発して，一定の加速度 a で等加速度運動している物体の時刻 t における速度 v と位置座標 x を求めよ。

$\dfrac{dv}{dt} = a$ から　$v = \int dv = \int a dt$

$\dfrac{dx}{dt} = v$ から　$x = \int dx = \int v dt = \int (\qquad\qquad) dt$

2-2　定積分

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ のとき，} \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Column

微積をなぜ使わないの？

微分積分を使うと物理の公式のいくつかは簡単に導くことができます。微分積分を使って今までの学習内容をまとめ直すと，物理がよくわかるようになったという高校生がたくさんいます。では，なぜ高校の物理では微分積分を使わないのでしょうか。

そもそも，物理学は数学を使って記述されています。高校物理では，まず，速さで微分の概念が使われています。速度ではベクトルの概念が使われます。あわせて，三角比や三角関数も必要になってきます。数学の学習に先駆けて，これらの数学的な扱いが物理で必要になってくるのです。

①ベクトルと三角比は避けて通ることができないので，最小限必要なことを物理の授業の中で学習して，使うことにしています。

②微分と積分は，物理の授業の中では扱いきれないので，グラフの傾きや面積という言い回しで概念だけを図形的に扱うことにしています。

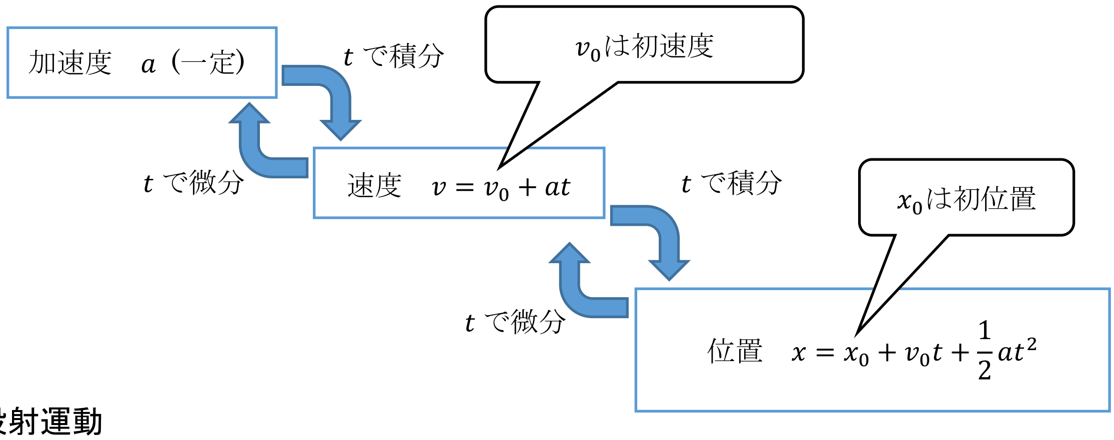
③微分積分を数学で学び終えるのが，３年生の後半になってしまうので，物理では微分積分を使わないままになっています。

高校物理で微積分を使わないのは，数学の学習の進度との兼ね合いでそうせざるを得ないからです。決して，微分積分が難しいからではないのです。高校物理で必要な微分積分は，数学でいえば基本中の基本，“いろは”の“い”にあたる部分です。ですから，３年生の後半に微分積分を使って物理の公式を見直すのは大変有意義なことです。

大学で学ぶ物理では，一般に微分積分は当たり前のように使われます。高校で微分積分を学んでいるのだから当然ですね。この機会に，授業では取り上げなくても是非自分で学びましょう。大学の学びでは，自分で学ぶということが大前提です。講義は指針を与えるためのきっかけにすぎません。大学では，友達に教えてもらうのではなくて，友達と議論することによって理解を深めるのです。

微分積分いい気分

3．等加速度運動と微積

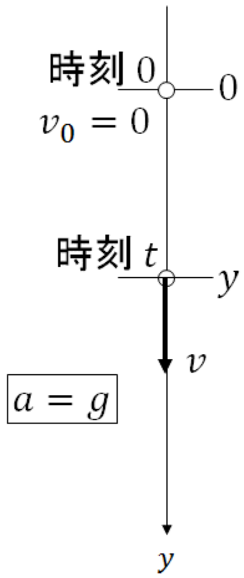


3-1　投射運動

❶自由落下

鉛直下向きに y 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。

初期条件：時刻 $t = 0$ のとき，原点 $y = 0$ から初速度 $v_0 = 0$ で落下を始める。



$a = g$ ⋯①

$a = \dfrac{dv}{dt}$ ⋯②　を①に代入する。　$\dfrac{dv}{dt} = g$ ⋯③

③を変形し，定積分にする。　$\displaystyle\int_0^v dv = \int_0^t g\,dt$ ⋯④

④を実行すると，$[v]_0^v = [gt]_0^t$ → $v = gt$ → $v = gt$ ⋯⑤

$v = \dfrac{dy}{dt}$ ⋯⑥　を⑤に代入する。　$\dfrac{dy}{dt} = v_0 + gt$ ⋯⑦

⑦を変形し，定積分にする。　$\displaystyle\int_0^y dy = \int_0^t gt\,dt$ ⋯⑧

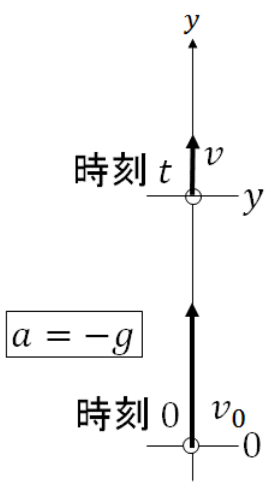
⑧を実行すると，(途中は省略)　　$y = \dfrac{1}{2}gt^2$ ⋯⑨

❷$\boxed{\text{問題 3-1-1}}$　鉛直投げ上げ

鉛直上向きに y 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。

初期条件：時刻 $t = 0$ のとき，原点 $y = 0$ から初速度 v_0 で投げ上げる。

$a = -g$ ⋯①　から始めて，時刻 t における v と y を求めよ。

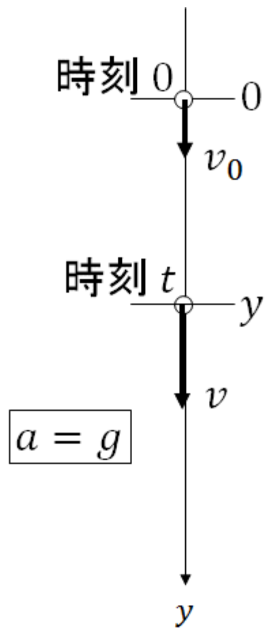


❸問題 3-1-2　鉛直投げ下ろし

鉛直下向きに y 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。

初期条件：時刻 $t=0$ のとき，原点 $y=0$ から初速度 v_0 で投げ下ろす。

$a=g$ ･･･①　から始めて，時刻 t における v と y を求めよ。

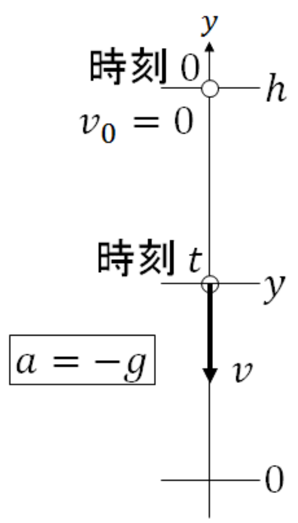


❹問題 3-1-3　高さ h からの自由落下（意外と使う機会が多い）

地表を原点として鉛直上向きに y 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。

初期条件：時刻 $t=0$ のとき，$y=h$ から初速度 $v_0=0$ で落下を始める。

$a=-g$ ･･･①　から始めて，時刻 t における v と y を求めよ。



４．運動方程式

❶微分で表現した運動方程式

$$ma = F \quad \Longleftrightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = F \quad \Longleftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

❷3 次元の運動方程式はベクトルまたは成分で表される

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} \qquad \left(x\text{成分：}ma_x = F_x \quad y\text{成分：}ma_y = F_y \quad z\text{成分：}ma_z = F_z\right)$$

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F} \quad \left(x\text{成分：}m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \quad y\text{成分：}m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \quad z\text{成分：}m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z\right)$$

$\overrightarrow{r}$は位置ベクトル

x 軸に沿った一次元の運動方程式だけを考えるときには，添字を省いて表記する。

4-1　力積と運動量

問題 4-1-1

$m\frac{dv}{dt} = F(t)$ をもとに，運動量の変化が力積に等しいという関係を導け。

時刻の積分区間は 0 から t，対応する速度の積分区間は v_0 から v とする。

4-2　仕事と運動エネルギー

問題 4-2-1

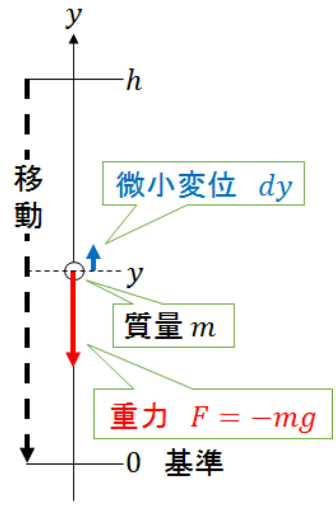
$m\frac{dv}{dt} = F(x)$ をもとに，$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = W$ (運動エネルギーの変化 = 仕事)という関係を導け。

（ヒント：$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$　$\int_{x_0}^{x} F(x)dx$ は力が変化する場合の仕事 W である。）

4-3　位置エネルギー

物体がある場所(x)から基準点に行く間に保存力 $F(x)$ が物体にした仕事 $\int_x^{基準点} F(x)dx$ が，その力による位置エネルギー U になる。ここでは，保存力として，重力，弾性力，万有引力，静電気力を取り上げる。

$$U = \int_x^{基準点} F(x)dx$$

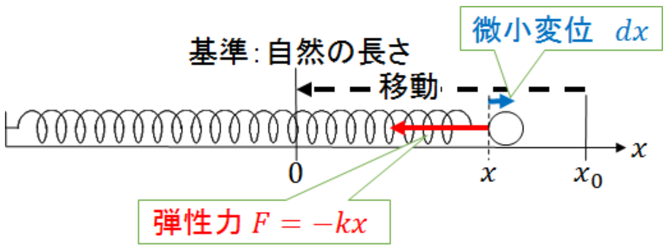


❶重力による位置エネルギー

$y = h$ における重力による位置エネルギーを求める。

$$U = \int_h^0 -mgdy = [-mgy]_h^0 = 0 - (-mgh) = mgh$$

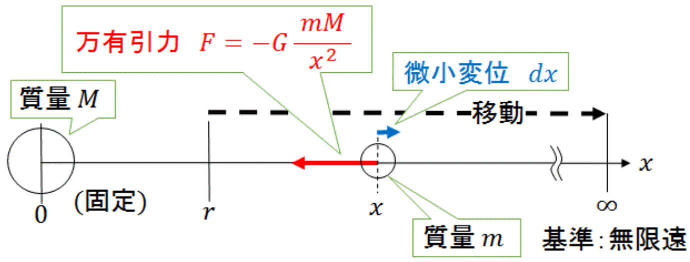
❷ばねの弾性力による位置エネルギー



$\boxed{\text{問題 4-3-1}}$　❶を参照して，$x = x_0$ におけるばねの弾性力による位置エネルギーを求めよ。

$$U = \int_{x_0}^0 -kxdx =$$

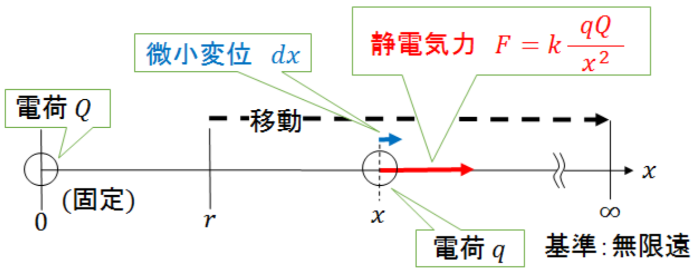
❸万有引力による位置エネルギー



$\boxed{\text{問題 4-3-2}}$　❶を参照して，$x = r$ における万有引力による位置エネルギーを求めよ。

$$U = \int_r^\infty -G\frac{mM}{x^2}dx =$$

❹静電気力による位置エネルギー



$\boxed{\text{問題 4-3-3}}$　❶を参照して，$x = r$ における静電気力による位置エネルギーを求めよ。

$$U = \int_r^\infty k\frac{qQ}{x^2}dx =$$

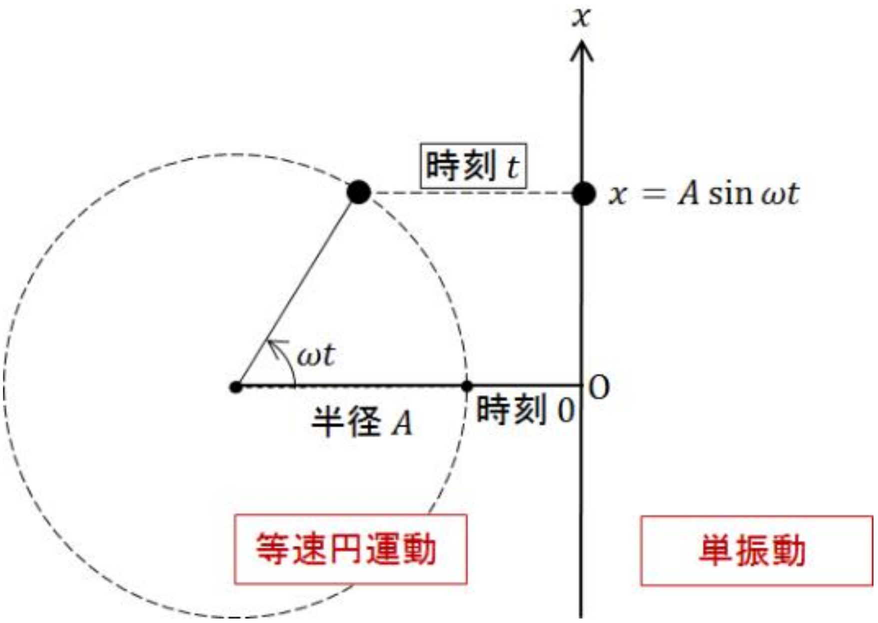
５．三角関数の微積分

問題 5-0-1　次の①～④を求めよ。積分定数は C とする。

①　$f(x) = \sin x$ のとき，$\dfrac{df(x)}{dx} =$
②　$f(x) = \cos x$ のとき，$\dfrac{df(x)}{dx} =$
③　$f(x) = \sin x$ のとき，$\displaystyle\int f(x)dx =$
④　$f(x) = \cos x$ のとき，$\displaystyle\int f(x)dx =$

5-1　単振動と微分

問題 5-1-1　半径A，角速度ω，初期位相 0 の等速円運動の正射影を考える。この正射影の動きが単振動である。単振動の速度 v，加速度 a を求めよ。



$$v = \frac{dx}{dt} =$$

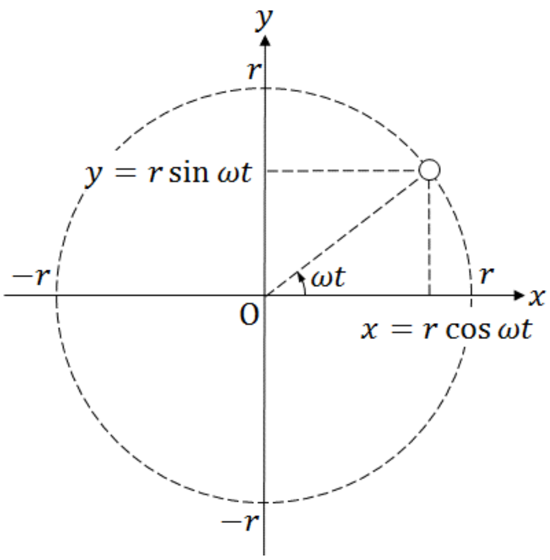
$$a = \frac{dv}{dt} =$$

復元力は運動方程式から求められる。復元力 $F = ma =$

5-2　等速円運動と微分

微分を使って，半径 r，一定の角速度 ω の等速円運動の速度・加速度を求められる。

$$\left(x(t), y(t)\right) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$$



速度の成分 (v_x, v_y) を求める。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\omega t)}{dt} = -r\omega\sin\omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(r\sin\omega t)}{dt} = r\omega\cos\omega t$$

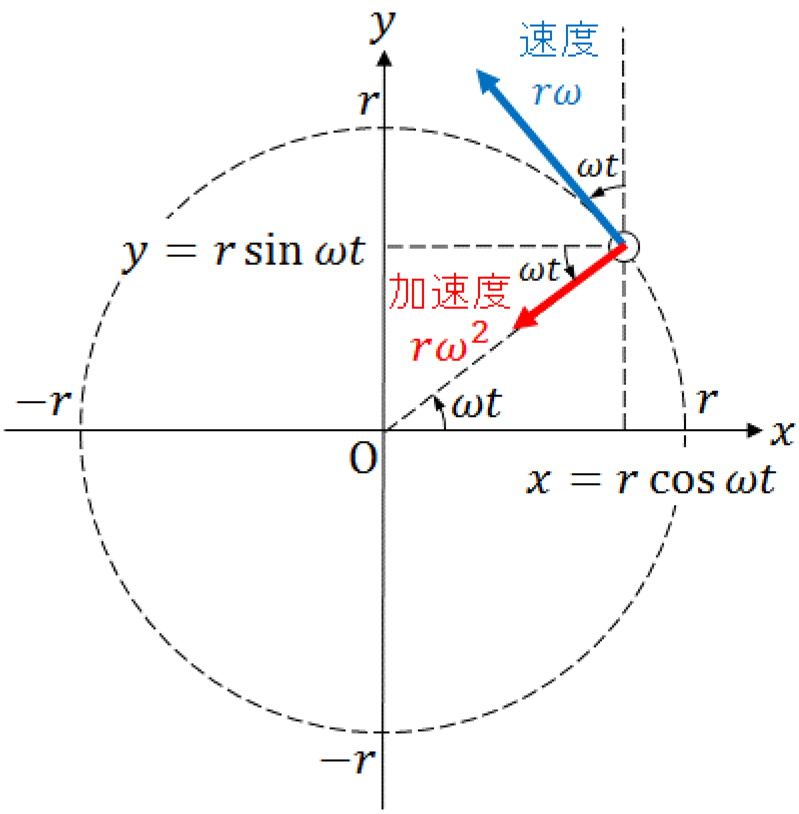
問題 5-2-1　**加速度の成分** (a_x, a_y) を求めよ。

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(-r\omega\sin\omega t)}{dt} =$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(r\omega\cos\omega t)}{dt} =$$

注　物体の質量が m であれば，向心力は，$\vec{F} = (F_x, F_y) = (ma_x, ma_y)$

問題 5-2-2　上で求めた速度・加速度の成分が、すでに学んだ等速円運動の速度ベクトル・加速度ベクトルの成分と一致することを確認せよ。



左の図から求めた、

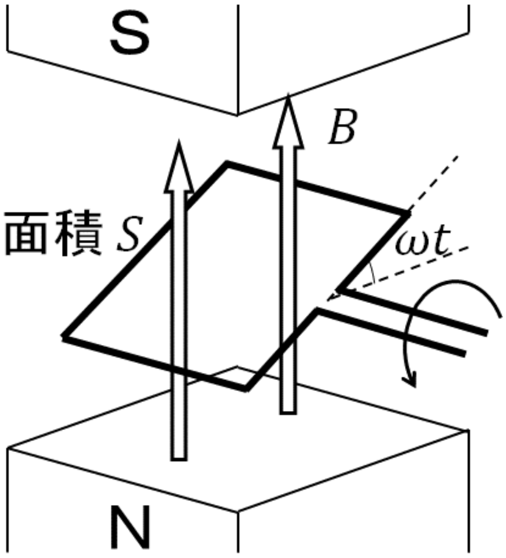
速度の x 成分=

速度の y 成分=

加速度の x 成分=

加速度の y 成分=

5-3　交流の発生



一様な磁束密度 B の磁場の中で，面積 S の 1 巻きのコイルを一定の角速度 ω で回転させるとき，コイルに発生する誘導起電力 V を求める。

求め方　ファラデーの電磁誘導の法則より，

$$V = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

磁束 $\Phi = B \times$ 磁場に垂直なコイルの断面積

$= BS\cos\omega t$　・・(1)

Δt を十分に 0 に近づけると，$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt}$

したがって，$V = -\frac{d\Phi}{dt}$ ・・・(2)

(1)を(2)へ代入すると，$V = BS\omega\sin\omega t$

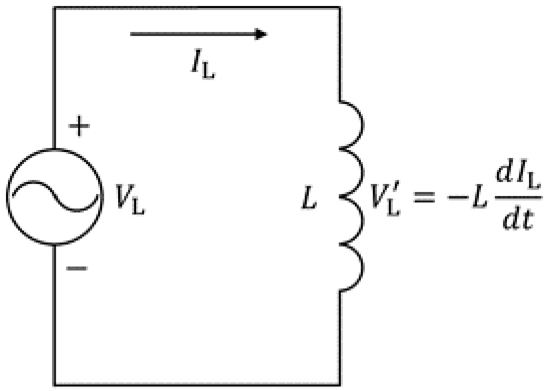
$BS\omega = V_0$ とおくと，$V = V_0\sin\omega t$

5-4　コイル・コンデンサーと交流

コイルとコンデンサーのそれぞれについて，流れる交流電流と加わる交流電圧の間の関係を求める。

❶コイル

コイルに加える電圧を V_{L}，コイルに生じる自己誘導起電力を V_{L}' とする。



キルヒホッフの法則Ⅱより，$V_{\mathrm{L}} + V_{\mathrm{L}}' = 0$

誘導起電力 V_{L}' は，$V_{\mathrm{L}}' = -L\frac{\Delta I_{\mathrm{L}}}{\Delta t}$ ⇒ $V_{\mathrm{L}}' = -L\frac{dI_{\mathrm{L}}}{dt}$

流れる交流電流を $I_{\mathrm{L}} = I_{\mathrm{L0}}\sin\omega t$ とおくと，

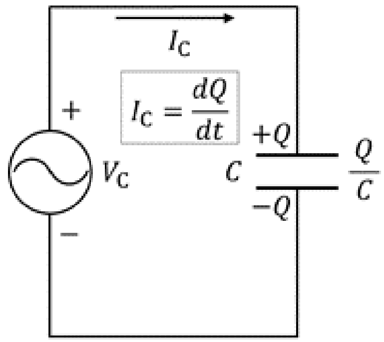
$$V_{\mathrm{L}} = -V_{\mathrm{L}}' = L\frac{dI_{\mathrm{L}}}{dt} = L\frac{d(I_{\mathrm{L0}}\sin\omega t)}{dt} = \omega L I_{\mathrm{L0}}\cos\omega t$$

$$= \omega L I_{\mathrm{L0}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_{\mathrm{L0}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$I_{\mathrm{L}} = I_{\mathrm{L0}}\sin\omega t \;\longleftrightarrow\; V_{\mathrm{L}} = V_{\mathrm{L0}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$　　$V_{\mathrm{L0}} = \omega L I_{\mathrm{L0}}$ 電流に対する電圧の位相のずれ　$\phi = \frac{\pi}{2}$

❷コンデンサー

コンデンサーに加える電圧を V_{C}，コンデンサーの電気量を Q とする。



コンデンサーにおける電圧降下は Q/C であるから，

キルヒホッフの法則Ⅱより，$V_{\mathrm{C}} = \dfrac{Q}{C}$

電流と電気量の間には，$I_{\mathrm{C}} = \dfrac{dQ}{dt}$ の関係がある。

したがって，　$I_{\mathrm{C}} = \dfrac{dQ}{dt} = C\dfrac{dV_{\mathrm{C}}}{dt}$

コンデンサーに加える電圧を $V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{C0}} \sin \omega t$ とおくと，

$$I_{\mathrm{C}} = C\frac{dV_{\mathrm{C}}}{dt} = C\frac{d(V_{\mathrm{C0}} \sin \omega t)}{dt} = \omega C V_{\mathrm{C0}} \cos \omega t = \omega C V_{\mathrm{C0}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{\mathrm{C0}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{C0}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \ \longleftrightarrow\ V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{C0}} \sin \omega t$$

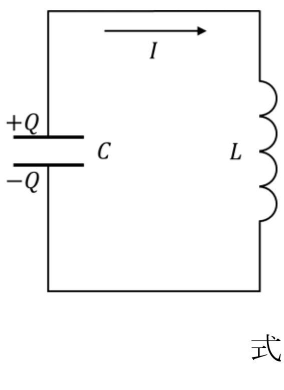
両式の位相から $\dfrac{\pi}{2}$ を引くと，

$$I_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{C0}} \sin \omega t \ \longleftrightarrow\ V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{C0}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad V_{\mathrm{C0}} = \frac{1}{\omega C} I_{\mathrm{C0}}$$

電流に対する電圧の位相のずれ　$\phi = -\dfrac{\pi}{2}$

5-5　電気振動

電気振動の固有周波数と振動周期



キルヒホッフの法則Ⅱ $-L\dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{Q}{C}$　　電流と電荷の関係 $I = -\dfrac{dQ}{dt}$

第 1 式を t で微分すると，

$$-L\frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad -L\frac{d^2I}{dt^2} = \frac{1}{C}I \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{1}{LC}I$$

単振動の加速度の式　$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$　と比較する。

式から見た対応関係は　$x \longleftrightarrow I$　$\omega^2 \longleftrightarrow \dfrac{1}{LC}$　$(\omega > 0)$

単振動の解は　$x = A\sin(\omega t + \theta)$　A：振幅　θ：初期位相

電気振動の解は　$I = I_0 \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t + \theta\right)$　I_0：Iの最大値　θ：初期位相

固有角周波数 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$　　固有周波数 $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$　　周期 $T = 2\pi\sqrt{LC}$

６．自然対数・指数と微積分

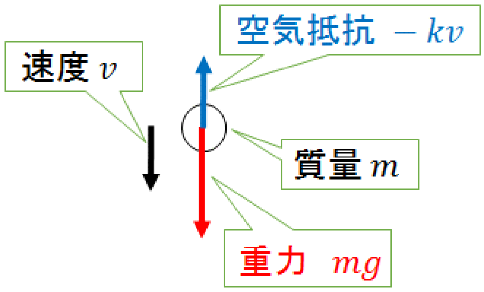
問題 6-0-1　次の①～②を求めよ。積分定数は C とする。

① $\dfrac{d\log\lvert x\rvert}{dx} =$	② $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx =$
③ $\dfrac{de^x}{dx} =$	④ $\displaystyle\int e^x\,dx =$

②の積分を使うと，教科書では扱わなかった式を導くことができます。

6-1　空気抵抗を受ける落下運動

初速度 0 で速度 v に比例する空気抵抗 kv を受けて落下する物体の時刻 t における速度 v を求める。



運動方程式　$ma = mg - kv$ を解く。

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$$

変形して積分する　$\displaystyle\int \frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} = \int -\frac{k}{m}dt$

$$\log\left|v - \frac{mg}{k}\right| = -\frac{k}{m}t + C(\text{積分定数})\cdots①$$

v は 0 から大きくなり，終端速度 $\dfrac{mg}{k}$ に達するので，$v - \dfrac{mg}{k} < 0$ したがって，

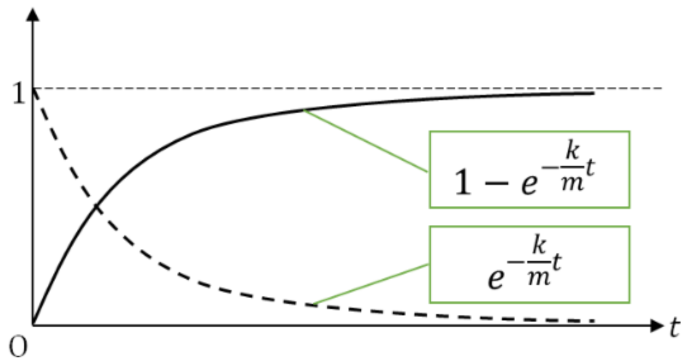
$\left|v - \dfrac{mg}{k}\right| = \dfrac{mg}{k} - v$ となり，①は　$\log\left(\dfrac{mg}{k} - v\right) = -\dfrac{k}{m}t + C$　となる。変形して，

$$e^{-\frac{k}{m}t+C} = \frac{mg}{k} - v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{mg}{k} - e^{-\frac{k}{m}t+C} \cdots②$$

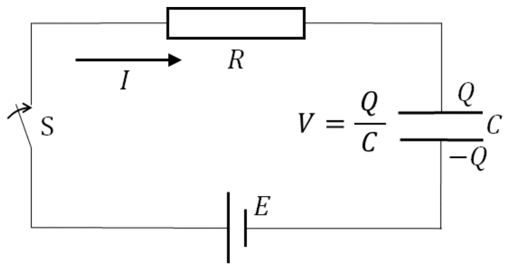
初期条件として，②に　$t = 0$ で $v = 0$ を代入すると，$0 = \dfrac{mg}{k} - e^C \quad \Rightarrow \quad e^C = \dfrac{mg}{k}$

②に戻すと，$v = \frac{mg}{k} - e^{-\frac{k}{m}t+C} = \frac{mg}{k} - e^{-\frac{k}{m}t}\cdot e^C = \frac{mg}{k} - e^{-\frac{k}{m}t}\cdot\frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$



6-2　コンデンサーの充電と放電



❶コンデンサーの充電　コンデンサーが充電されていない状態でスイッチ S を入れる。S を入れてから t 秒後の電気量を求める。

キルヒホッフの第２法則と電気量と電流の関係から，

$$E = RI + \frac{Q}{C} \quad , \; I = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad E = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

式を変形する。　$R\dfrac{dQ}{dt} = E - \dfrac{Q}{C} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{E}{R} - \dfrac{Q}{RC} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dQ}{dt} = -\dfrac{1}{RC}(Q - CE)$

さらに変形し積分 $\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dQ}{Q-CE} = \int -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow \log|Q - CE| = -\frac{t}{RC} + \alpha$(積分定数)･･①

Q は 0 から大きくなり CE に達するので，$Q - CE < 0$　したがって，$|Q - CE| = CE - Q$

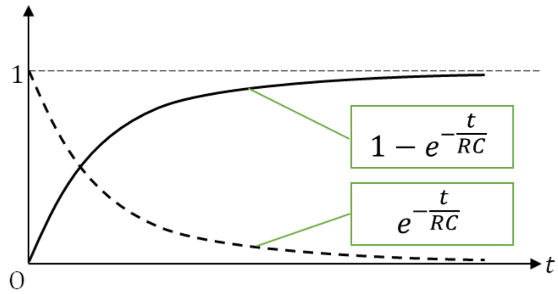
①　は　$\log(CE - Q) = -\frac{t}{RC} + \alpha$　となる。

さらに変形して，$e^{-\frac{t}{RC}+\alpha} = CE - Q \quad \Rightarrow \quad Q = CE - e^{-\frac{t}{RC}+\alpha}$　･･②

初期条件として，②に $t = 0$ で $Q = 0$ を代入すると，$0 = CE - e^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha} = CE$

②に戻すと，$Q = CE - e^{-\frac{t}{RC}+\alpha} = Q = CE - e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{\alpha} = CE - e^{-\frac{t}{RC}} \cdot CE = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

$$Q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

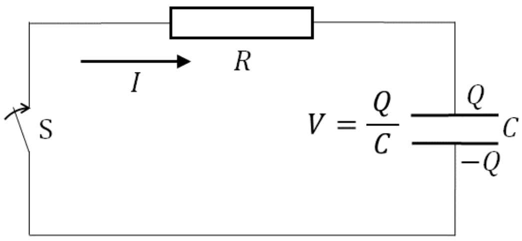


問題 6-2-1

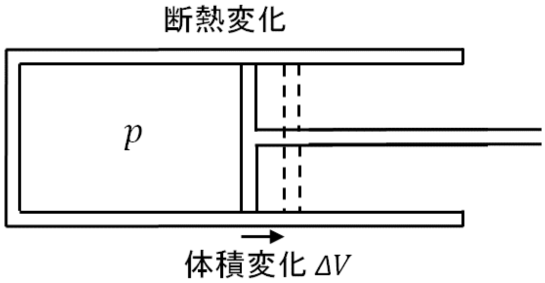
$Q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ から $I = \dfrac{dQ}{dt}$ の関係を使って，

回路を流れる電流 I を求めよ。

❷コンデンサーの放電



$\boxed{\text{問題 6-2-2}}$　コンデンサーが充電されて Q_0 の電荷を蓄えている状態でスイッチ S を入れる。S を入れてから t 秒後にコンデンサーに蓄えられている電気量 Q と流れる電流 I を求めよ。ただし，$I=\dfrac{dQ}{dt}$ である。



6-3　断熱変化におけるポアソンの法則

熱力学第一法則　$\varDelta U=Q+W$　で $Q=0$ ，微小な体積変化 $\varDelta V$ に対して気体がされた仕事 W が，

$W=-p\,\varDelta V$ で表されることから，

$\varDelta U=-p\,\varDelta V$･･･①

一方，$\varDelta U$はこの間の温度変化$\varDelta T$と，定積モル比熱C_V，気体の物質量nを用いると，

$\varDelta U=nC_V\varDelta T$･･･②

また，状態方程式から，$pV=nRT \Rightarrow p=\dfrac{nRT}{V}$･･･③

②と③を①に代入して，$nC_V\varDelta T=-\dfrac{nRT}{V}\varDelta V$･･･④

ここで，マイヤーの関係 $C_p=C_V+R$ より， $R=C_p-C_V$ を④に代入して整理すると，

$$C_V\varDelta T=-\frac{(C_p-C_V)T}{V}\varDelta V \;\Rightarrow\; \varDelta T=-\frac{\left(\frac{C_p}{C_V}-1\right)T}{V}\varDelta V \;\Rightarrow\; \varDelta T=-\frac{(\gamma-1)T}{V}\varDelta V\cdots⑤$$

⑤で $\gamma=\dfrac{C_p}{C_V}$ は比熱比である。⑤を変形して積分を行う。

$$\int\frac{\varDelta T}{T}=-(\gamma-1)\int\frac{\varDelta V}{V} \;\Rightarrow\; \log T=-(\gamma-1)\log V+C(\text{積分定数})$$

$$\Rightarrow\; \log T+(\gamma-1)\log V=C \Rightarrow \log T+\log V^{\gamma-1}=C \Rightarrow \log TV^{\gamma-1}=C\cdots⑥$$

⑥は，$TV^{\gamma-1}=e^C$ となる。ここで，e^Cは定数であるから，$TV^{\gamma-1}=$一定　が得られる。

さらに，ボイル･シャルルの法則 $\dfrac{pV}{T}=$一定 を両辺に掛けて，$pV^{\gamma}=$一定 が得られる。

6-4　半減期

原子核の崩壊は確率的に起こる現象である。1 個の原子核が 1 秒間に崩壊する確率は原子核の種類によって決まっている。原子核または素粒子が微小時間 dt 内に崩壊する確率を λdt と表したときの λ を**崩壊定数**という。

このことを出発点にして，半減期の式 $N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ を求めてみよう。（T: 半減期）

求め方

崩壊定数の定義から、時刻 t において N 個の原子核が存在すれば，dt 秒経過後に崩壊している原子核数は $\lambda dt \times N$, すなわち、$dN = -\lambda N dt$

これより，微分方程式　$\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$　が成り立つ。

この式を，$\dfrac{dN}{N} = -\lambda dt$　と変形して，$\displaystyle\int \frac{dN}{N} = \int -\lambda dt$　の積分を実行すると，

$$\log N = -\lambda t + C \quad (C\text{は積分定数}) \quad \Rightarrow \quad N = e^{-\lambda t + C}$$

時刻 $t = 0$ における原子核数 $N = N_0$ とすると，$N_0 = e^C$ となり，

$$N = e^{-\lambda t + C} = e^C e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\lambda t}$$

ここで，$e^{-\lambda t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ となる T を求めてみよう。

両辺の対数（自然対数）をとってみる。

$$\log e^{-\lambda t} = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \Rightarrow \quad -\lambda t = \log 2^{-\frac{t}{T}} = -\frac{t}{T}\log 2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\log 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

この T を用いると，$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ の半減期の式が得られる。

付録　問題解答

問題 1-1-1　次の①～④を求めよ。

【解答】　①　$f(x)=x^2$ のとき，$\dfrac{df}{dx}=2x$　　②　$f(x)=x$ のとき，$\dfrac{df}{dx}=1$

③　$f(x)=$ 定数 のとき，$\dfrac{df}{dx}=0$　　④　$f(x)=x^{-1}$ のとき，$\dfrac{df}{dx}=-x^{-2}$

問題 1-2-1　物体の時刻 t [s]における位置座標 x [m]が，$x=12+6t+0.4t^2$ と表される。この物体の時刻 $t=0$ [s] における位置の x 座標を求めよ。

【解答】x の式に $t=0$ を代入して，$x=12$ [m]

問題 1-2-2　物体の時刻 t [s] における位置座標 x [m] が，$x=12+6t+0.4t^2$ と表される。この物体の時刻 t [s] における速度 v [m/s] を求めよ。

【解答】 $v=\dfrac{dx}{dt}=6+0.8t$ [m/s]

問題 1-2-3　物体の時刻 t [s] における速度 v [m/s] が，$v=6+0.8t$ と表される。この物体の時刻 t [s] における加速度 a [m/s^2] を求めよ。

【解答】 $a=\dfrac{dv}{dt}=0.8$ [m/s^2]

問題 1-2-4　x 軸上の原点を時刻 0 に出発して等加速度運動している物体の時刻 t における位置座標 x が，$x=pt+qt^2$ と表されるとき，この物体の初速度 v_0 と加速度 a を求めよ。

【解答】$v=\dfrac{dx}{dt}=p+2qt$　$t=0$ のとき，$v=v_0$　したがって，$v_0=p$

$a=\dfrac{dv}{dt}=2q$　したがって，$a=2q$

問題 2-1-1　次の①～④を求めよ。積分定数は C とする。

【解答】①　$f(x)=x^2$ のとき，$\displaystyle\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$　　②　$f(x)=x$ のとき，$\displaystyle\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$

③　$f(x)=a$ (定数)のとき，$\int adx=ax+C$　　④　$f(x)=x^{-2}$ のとき，$\int x^{-2}dx=-x^{-1}+C$

問題 2-1-2　x 軸上の原点を時刻 0 に初速度 v_0 で出発して，一定の加速度 a で等加速度運動している物体の時刻 t における速度 v と位置座標 x を求めよ。

【解答】 $\dfrac{dv}{dt}=a$ から　$\displaystyle v=\int dv=\int adt$ ⇒ $v=at+C_1$

⇒ 初期条件 $t=0$ で $v=v_0$ を入れて $C_1=0$　⇒ $v=v_0+at$

$$\frac{dx}{dt} = v \text{ から } v = \int dx = \int vdt = \int (v_0 + at)\, dt \;\Rightarrow\; x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \text{初期条件 } t = 0 \text{ で } x = 0 \text{（原点） を入れて } C_2 = 0 \quad \Rightarrow \; x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

問題 3-1-1　鉛直投げ上げ

鉛直上向きに y 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。初期条件：時刻 $t = 0$ のとき，原点 $y = 0$ から初速度 v_0 で投げ上げる。$a = -g$ から始めて，時刻 t における v と y 求めよ。

【解答】 $\dfrac{dv}{dt} = a = -g$ から $\displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t -gdt \;\Rightarrow\; v - v_0 = -gt \;\Rightarrow\; v = v_0 - gt$

$$\frac{dy}{dt} = v \text{ から } \int_0^y dy = \int_0^t vdt \;\Rightarrow\; \int_0^y dy = \int_0^t (v_0 - gt)\, dt \;\Rightarrow\; y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

問題 3-1-2　鉛直投げ下ろし

鉛直下向きに y 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。初期条件：時刻 $t = 0$ のとき，原点 $y = 0$ から初速度 v_0 で投げ下ろす。$a = g$ から始めて，時刻 t における v と y を求めよ。

【解答】 $\dfrac{dv}{dt} = a = g$ から $\displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t gdt \;\Rightarrow\; v - v_0 = gt \;\Rightarrow\; v = v_0 + gt$

$$\frac{dy}{dt} = v \text{ から } \int_0^y dy = \int_0^t vdt \;\Rightarrow\; \int_0^y dy = \int_0^t (v_0 + gt)\, dt \;\Rightarrow\; y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

問題 3-1-3　高さ h からの自由落下

地表を原点として鉛直上向きに y 軸をとる。地面を重力加速度の大きさを g とする。初期条件：時刻 $t = 0$ のとき， $y = h$ から初速度 $v_0 = 0$ で落下を始める。
$a = -g$ から始めて，時刻 t における v と y を求めよ。

【解答】 $\dfrac{dv}{dt} = a = -g$ から $\displaystyle\int_0^{v} dv = \int_0^t -gdt \;\Rightarrow\; v = -gt \;\Rightarrow\; v = -gt$

$$\frac{dy}{dt} = v \text{ から } \int_h^y dy = \int_0^t vdt \;\Rightarrow\; \int_h^y dy = \int_0^t -gtdt \;\Rightarrow\; y - h = -\frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

問題 4-1-1

$m\dfrac{dv}{dt} = F(t)$ をもとに，運動量の変化が力積に等しいという関係を導け。時刻の積分区間は 0 から t，対応する速度の積分区間は v_0 から v とする。

【解答】 $m\dfrac{dv}{dt} = F(t) \;\Rightarrow\; mdv = F(t)dt \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_{v_0}^{v} mdv = \int_0^t F(t)dt \;\Rightarrow\; mv - mv_0 = \int_0^t F(t)dt$

$\int_0^t F(t)dt$ は力が変化する場合の力積であるから，運動量の変化が力積に等しいことが導かれた。

問題 4-2-1

$m\dfrac{dv}{dt}=F(x)$ をもとに，$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}m{v_0}^2=W$ (運動エネルギーの変化 = 仕事)という関係を導け。

（ヒント：$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}$　$\displaystyle\int_{x_0}^{x}F(x)dx$ は力が変化する場合の仕事 W である。）

【解答】$m\dfrac{dv}{dt}=F(x)\ \Rightarrow\ m\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=F(x)\ \Rightarrow\ m\dfrac{dv}{dx}v=F(x)\ \Rightarrow\ mv\dfrac{dv}{dx}=F(x)$

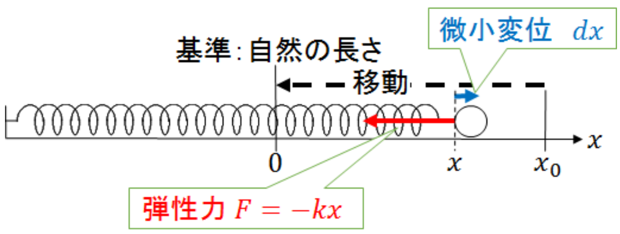
$\Rightarrow\ mvdv=F(x)dx\Rightarrow\ \displaystyle\int_{v_0}^{v}mvdv=\int_{x_0}^{x}F(x)dx\Rightarrow\ \dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}m{v_0}^2=\int_{x_0}^{x}F(x)dx$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}m{v_0}^2=W$

したがって，運動エネルギーの変化が仕事に等しいという関係が導かれた。

問題 4-3-1　$x=x_0$ におけるばねの弾性力による位置エネルギーを求めよ。

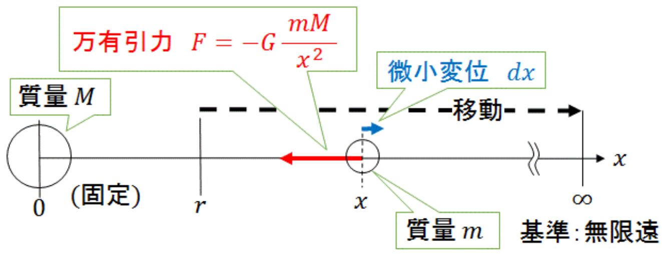
【解答】$U=\displaystyle\int_{x_0}^{0}-kxdx=\left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_0}^{0}=\frac{1}{2}k{x_0}^2$



問題 4-3-2　$x=r$ における万有引力による位置エネルギーを求めよ。

【解答】$U=\displaystyle\int_{r}^{\infty}-G\frac{mM}{x^2}dx=\left[G\frac{mM}{x}\right]_{r}^{\infty}$

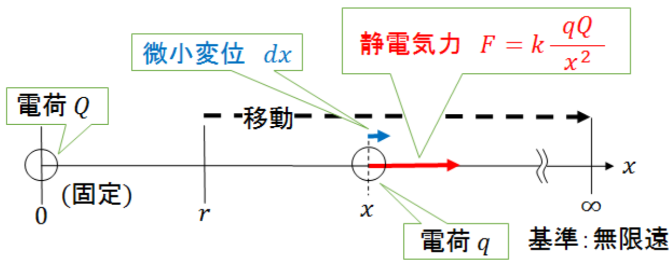
$=-G\dfrac{mM}{r}$



問題 4-3-3　$x=r$ における静電気力による位置エネルギーを求めよ。

【解答】$U=\displaystyle\int_{r}^{\infty}k\frac{qQ}{x^2}dx=\left[-k\frac{qQ}{x}\right]_{r}^{\infty}$

$=k\dfrac{qQ}{r}$

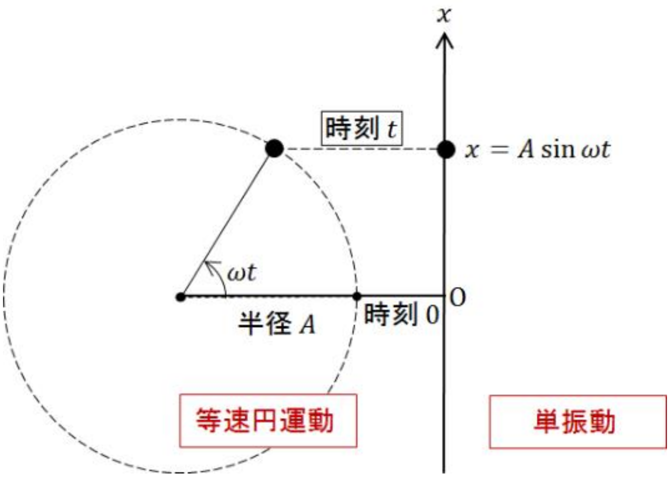


問題 5-0-1　次の①～④を求めよ。積分定数は C とする。

【解答】① $f(x)=\sin x$ のとき，$\dfrac{df(x)}{dx}=\cos x$　② $f(x)=\cos x$ のとき，$\dfrac{df(x)}{dx}=-\sin x$

③ $f(x)=\sin x$ のとき，$\displaystyle\int f(x)dx=-\cos x+C$　④ $f(x)=\cos x$ のとき，$\displaystyle\int f(x)dx=\sin x+C$

$\boxed{\text{問題 5-1-1}}$　半径A，角速度ω，初期位相 0 の等速円運動の正射影を考える。この正射影の動きが単振動である。単振動の速度 v，加速度 a を求めよ。



【解答】$x = A\sin\omega t$ から求める。

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t$$

【参考】$a = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$

単振動する物体の質量を m とすると，復元力は運動方程式から求められる。

復元力 $F = ma = -m\omega^2 x$

$\boxed{\text{問題 5-2-1}}$　**加速度の成分**を求めよ。

【解答】$a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d(-r\omega\sin\omega t)}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(r\omega\cos\omega t)}{dt} = -r\omega^2\sin\omega t$$

$\boxed{\text{問題 5-2-2}}$　上で求めた速度・加速度の成分が、すでに学んだ等速円運動の速度ベクトル・加速度ベクトルの成分と一致することを確認せよ。

【解答】右の図から求める。

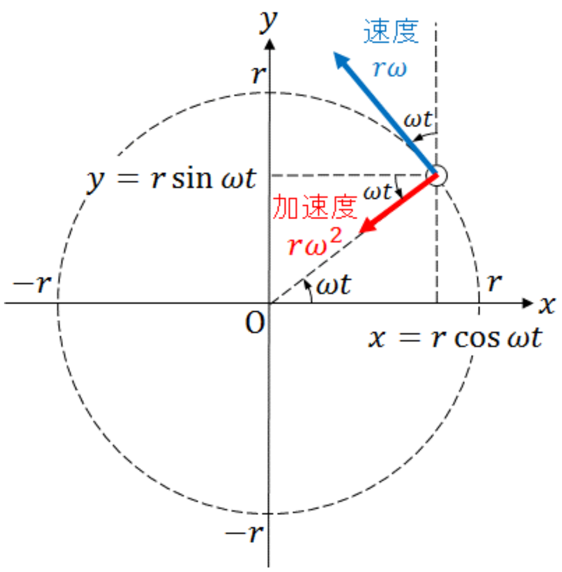
速度の x 成分 $v_x = -r\omega\sin\omega t$

速度の y 成分 $v_y = r\omega\cos\omega t$

加速度の x 成分 $a_x = -r\omega^2\cos\omega t$=

加速度の y 成分 $a_y = -r\omega^2\sin\omega t$

微分で求めた値と一致した。



問題 6-0-1　次の①～②を求めよ。積分定数は C とする。

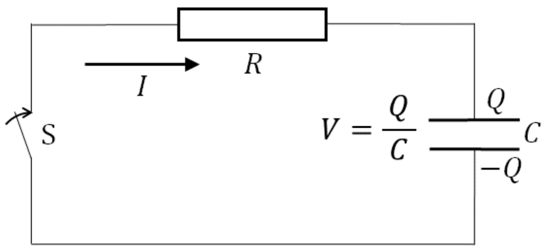
【解答】① $\dfrac{d\log|x|}{dx}=\dfrac{1}{x}$　　② $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log|x|\ +C$　　③ $\dfrac{de^{x}}{dx}=e^{x}$　　④ $\displaystyle\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

問題 6-2-1

$Q=CE\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ から $I=\dfrac{dQ}{dt}$ の関係を使って，回路を流れる電流 I を求めよ。

【解答】$I=\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{d\left\{CE\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right\}}{dt}=\dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

問題 6-2-2　コンデンサーが充電されて Q_0 の電荷を蓄えている状態でスイッチ S を入れる。S を入れてから t 秒後にコンデンサーに蓄えられている電気量 Q と流れる電流 I を求めよ。



ただし，$I=\dfrac{dQ}{dt}$ である。

【解答】

キルヒホッフの第 2 法則と電気量と電流の関係から，

$0=RI+\dfrac{Q}{C}$　，$I=\dfrac{dQ}{dt}$　⇒　$0=R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{Q}{C}$　⇒　$\dfrac{dQ}{dt}=-\dfrac{Q}{RC}$

変形し積分する ⇒ $\displaystyle\int\frac{dQ}{Q}=\int-\frac{1}{RC}dt$ ⇒ $\log|Q|=-\dfrac{t}{RC}+\alpha$(積分定数)

Q は Q_0 から小さくなり 0 に達するので，$Q>0$ したがって，

$\log Q=-\dfrac{t}{RC}+\alpha$ となり，$Q=-e^{-\frac{t}{RC}+\alpha}$　‥①

初期条件として，①に $t=0$ で $Q=\ Q_0$ を代入すると，$Q_0=-e^{\alpha}$　⇒　$e^{\alpha}=-\,Q_0$

①に戻すと，$Q=-e^{-\frac{t}{RC}}\cdot e^{\alpha}=\ Q_0e^{-\frac{t}{RC}}$

$I=\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{d\left(Q_0e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{dt}=-\dfrac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$