

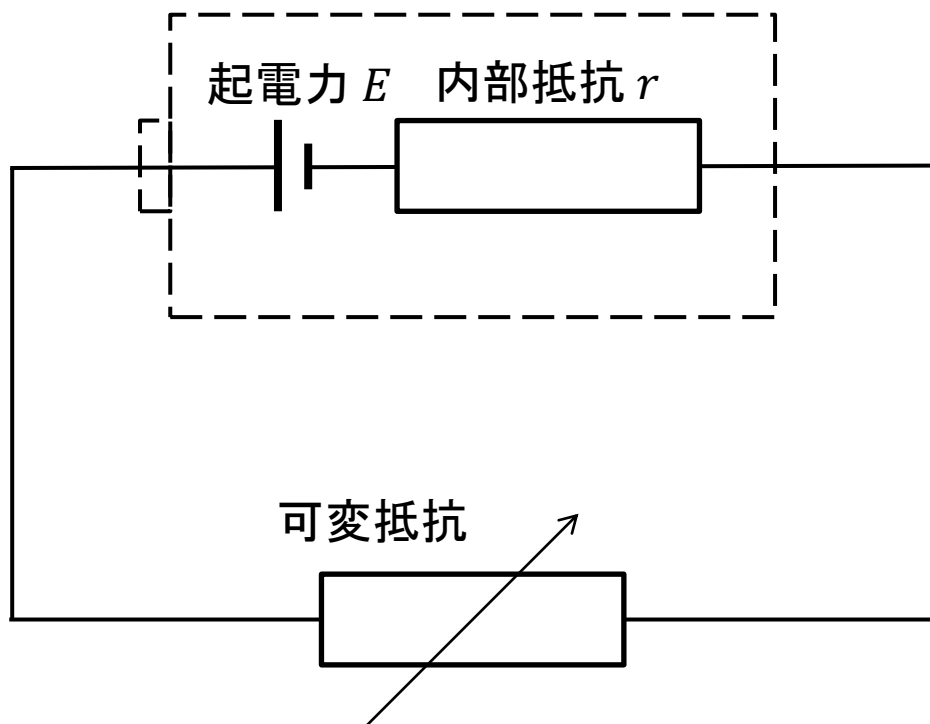
ikeT物理



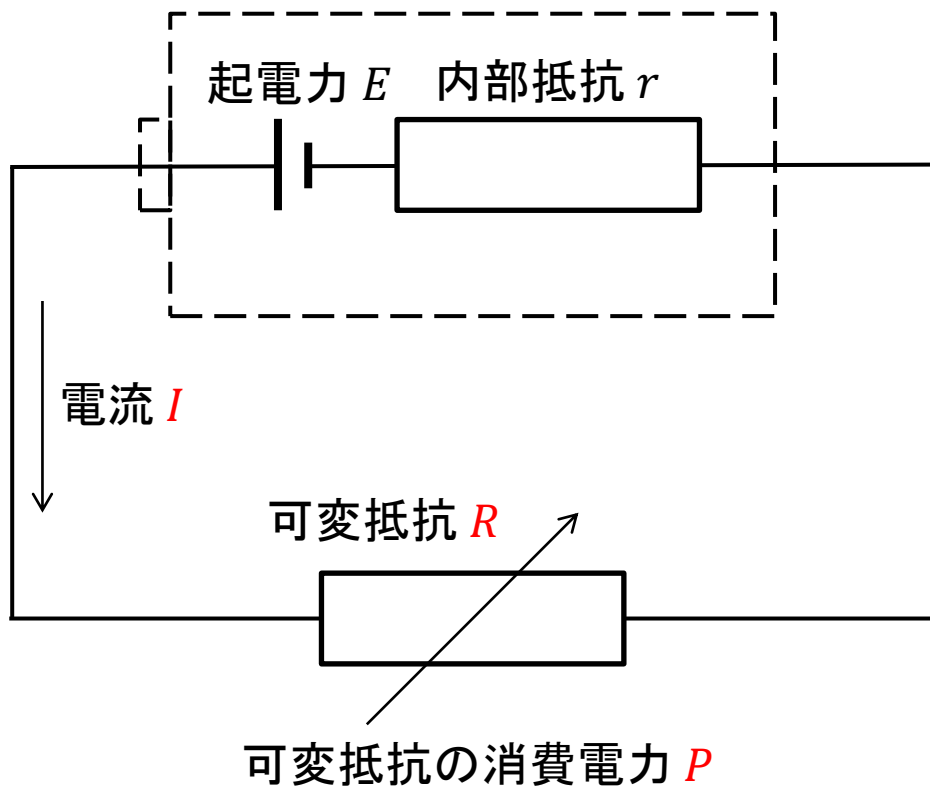
電池から取り出せる
最大電力(3つの秘法)



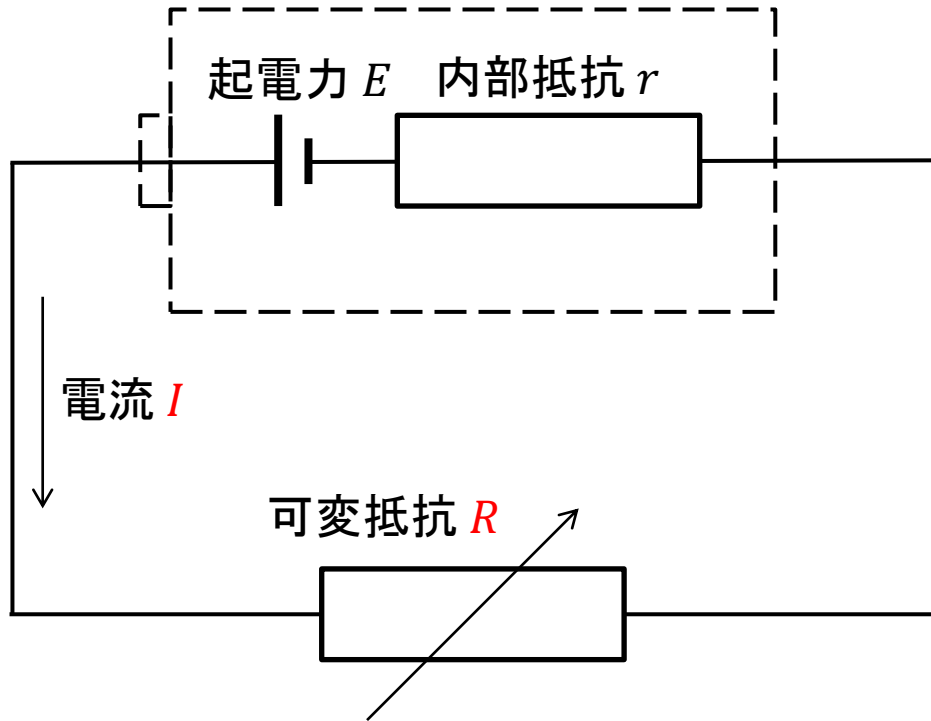
問題 図の回路において、外部の可変抵抗における消費電力が最大になるときの可変抵抗の値と、消費電力の最大値を求めよ。



解答しやすいように、文字を置きましょう。
可変抵抗の消費電力を表すために必要な、最小限にとどめましょう。



可変抵抗の消費電力 P は次のように表せます。



可変抵抗の消費電力 P

$$P = RI^2 = R \left(\frac{E}{R + r} \right)^2$$

I をはさんだ方が式がわかりやすいので使ったが、この後はもう使わない。
物理の問題としてはこれで終わり。

ここからは数学の問題 → R を変数として、 P の最大値を求める問題です。

消費電力 P の最大値は次のように求めます。

①知ってりゃ得する微分法・・・考えなくてもほぼ機械的に解けてしまう

$$P = R \left(\frac{E}{R+r} \right)^2 = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$$

微分の公式 $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ あるいは $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$$P = \frac{RE^2}{(R+r)^2} = RE^2 \cdot (R+r)^{-2} \quad \text{とすると, 積の微分で } f = RE^2, \quad g = (R+r)^{-2}$$

間違わないように

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR} &= E^2 \cdot (R+r)^{-2} + RE^2 \cdot \{-2(R+r)^{-3}\} = \frac{E^2}{(R+r)^2} - \frac{2RE^2}{(R+r)^3} \\ &= \frac{(R+r)E^2 - 2RE^2}{(R+r)^3} = \frac{(r-R)E^2}{(R+r)^3} \end{aligned}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \text{となるのは、} R = r \quad \text{のときで、そのとき最大値は、} P = \frac{rE^2}{(r+r)^2} = \frac{E^2}{4r}$$

本来は増減表を作って、最大値になることを確認しますが、省略しました。

消費電力 P の最大値は次のように求めます。

②最大最少は完全平方で……微分を使わないときの標準解法かな？

$$P = R \left(\frac{E}{R+r} \right)^2 = \frac{RE^2}{(R+r)^2} \quad \text{分母と分子に変数}R\text{が入っていると分かりにくいので、}$$
$$P = \frac{RE^2}{R^2 + 2Rr + r^2} = \frac{E^2}{R + 2r + \frac{r^2}{R}} = \frac{E^2}{(\sqrt{R})^2 + 2r + \left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2} = \frac{E^2}{\left(\sqrt{R} - \frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2 + 4r}$$

知らないといけない変形

完全平方の完成

分母が最小となるのは、 $R = r$ のときで、

$$\text{そのとき } P \text{ は最大値をとり、} P = \frac{rE^2}{(r+r)^2} = \frac{E^2}{4r}$$

この方法は簡単なのですが、知らないちょっと無理。つまりは、覚えてしまおう！

消費電力 P の最大値は次のように求めます。

③たまに出てくる相加相乗……そうか、この手もあったか！

相加相乗平均についての公式

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ のとき、} \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{等号は} a = b$$

$$P = R \left(\frac{E}{R+r} \right)^2 = \frac{RE^2}{(R+r)^2} \quad \text{分母と分子に変数} R \text{が入っていると分かりにくいので、}$$

$$P = \frac{RE^2}{R^2 + 2Rr + r^2} = \frac{E^2}{R + 2r + \frac{r^2}{R}} \leq \frac{E^2}{2\sqrt{R \cdot \frac{r^2}{R}} + 2r} = \frac{E^2}{4r}$$

知らないといけない変形

相加相乗平均の関係

分母が最小となるのは、
 $R = r$ のときで、

分母に適用したので、不等号の向きに注意が必要

そのとき P は最大値をとり、 $P = \frac{E^2}{4r}$

以上の3通りのやり方がよく出ています。知っていて練習しておけば誰にでもできます。どれか一つはマスターしておきましょう。