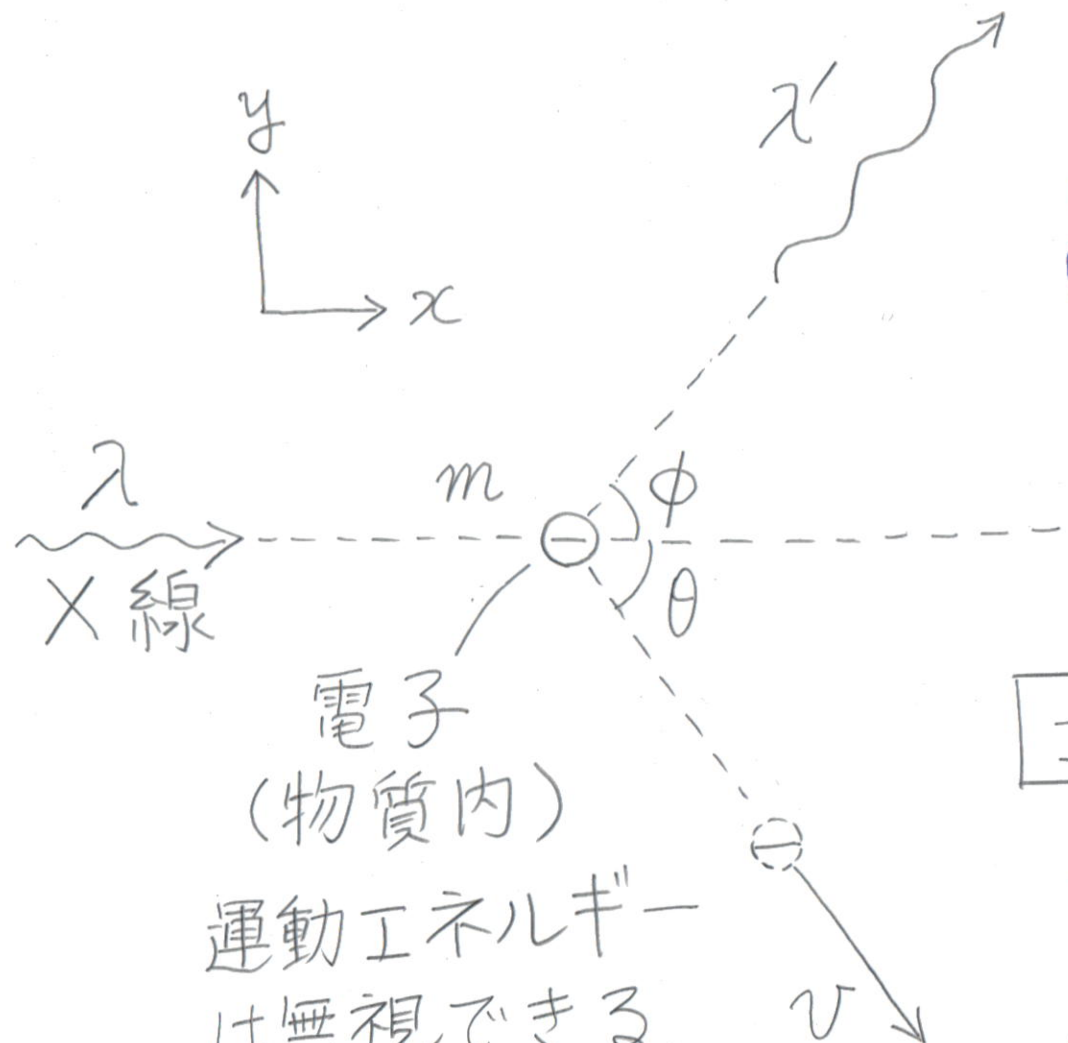
◎コンプトン効果



運動エネルギーは無視できる。

vとθは測定しない

Point

$\boxed{\text{X線光子}}$

エネルギー

$h\nu$, $\dfrac{hc}{\lambda}$

運動量

$\dfrac{h}{\lambda}$, $\dfrac{h\nu}{c}$

$\boxed{\text{コンプトン効果のとらえ方}}$

X線光子と電子の弾性衝突ととらえる。

エネルギー保存則 $\Rightarrow$ 弾性衝突では，エネルギーが保存される.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{-----①}$$

運動量保存則

x方向 $$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\phi + mv\cos\theta \quad \text{---②}$$

y方向 $$0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\phi - mv\sin\theta \quad \text{---③}$$

何気に差がつくポイントです

ν と θ は測定せず, λ, λ', ϕ を測定している。
①, ②, ③式から, ν と θ を消去して, λ, λ', ϕ の関係を求め, 実験結果とくらべる。

→ あっていれば,

X線光子と電子の弾性衝突モデルが妥当であるといえる。

vとθをどう消去するか

②,③式に $\cos\theta$ と $\sin\theta$ があるので,

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に持ちこみましょう。

②より, $mv\cos\theta = \dfrac{h}{\lambda} - \dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi$ ----②′

③より $mv\sin\theta = \dfrac{h}{\lambda'}\sin\phi$ -----③′

②′より $m^2v^2\cos^2\theta = \dfrac{h^2}{\lambda^2} - \dfrac{2h^2}{\lambda\lambda'}\cos\phi + \dfrac{h^2}{\lambda'^2}\cos^2\phi$ …②″

+) ③′より $m^2v^2\sin^2\theta = \dfrac{h^2}{\lambda'^2}\sin^2\phi$ …③″

$$m^2v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}\cos\phi + \frac{h^2}{\lambda'^2} \quad \text{----④}$$

次に①と④からvを消去しましょう。

①より　$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$ ----①′

①′×2m　$m^2v^2 = \frac{2mhc}{\lambda} - \frac{2mhc}{\lambda'}$ ----①″

④　$m^2v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}\cos\phi + \frac{h^2}{\lambda'^2}$

よって，$\frac{2mhc}{\lambda} - \frac{2mhc}{\lambda'} = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}\cos\phi + \frac{h^2}{\lambda'^2}$

$$\frac{2mhc}{\lambda\lambda'}(\lambda' - \lambda) = h^2\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\phi + \frac{1}{\lambda'^2}\right)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{2mc}\left(\frac{\lambda'}{\lambda} - 2\cos\phi + \frac{\lambda}{\lambda'}\right)$$ ----⑤

⑤式に対して，$\lambda \fallingdotseq \lambda'$ として，$\dfrac{\lambda'}{\lambda} + \dfrac{\lambda}{\lambda'} \fallingdotseq 2$ の近似を使います。

（同じことですが，$\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda'^2} \fallingdotseq \dfrac{2}{\lambda\lambda'}$ も使います。）

すると，

⑤式は，
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{2mc}(2 - 2\cos\phi)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$\underline{\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)}$$