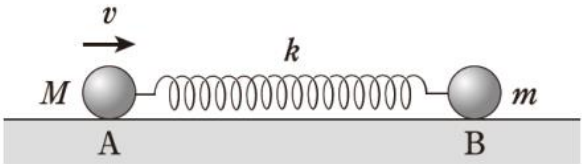
単振動の問題は，パターン化されています。パターン化されていますが，解答の道のりが長いものが多いので，丹念に学んではじめて会得できます。

連結した2物体の単振動解法研究

Ⅰ 水平面上に，なめらかな溝をもつ直線のレールがある。この溝の中に，質量 M，m の小球 A，B を置き，両者をばね定数 k のばねでつないで静止させた。ある瞬間に，A に大きさ v の右向きの速度を与えると，その後，A と B は，振動しながら全体として右向きに進んでいった。運動を始めた後について，次の各問に答えよ。



(1) A と B をまとめて1つの物体とみなしたとき，その重心の速度の大きさを求めよ。

(2) 重心から見た B の運動は単振動になる。その周期を求めよ。

(3) 重心から見た B の単振動の振幅を求めよ。

<指針> A と B は，ばねの弾性力をおよぼしあい，振動しながら全体として右向きに進む。A，B を1つの物体系と考えると，弾性力は内力であり，物体系の運動量は保存される。このとき，重心は等速直線運動をしている。重心から見た場合，ばねの左側の部分の A の単振動と，右側の部分の B の単振動に分けて考えることができる。

<確認>

・重心から見る場合(重心系)は，慣性系となる。重心から見ると，重心に一致しているばねの位置は静止して見える。

・A と B は運動方向に外力を受けないので，運動量保存の法則が成り立ち，このとき，重心の速度 v_{G} は一定となる。

・2つの物体の重心は，物体間の距離を質量の逆比に内分した点となる。したがって，
$l_{\mathrm{A}}:l_{\mathrm{B}}=m:M$

・A に速度を与えた瞬間，ばねは自然の長さである。このとき，重心から見ても，A，B はいずれも自然の長さの位置にあるので，振動の中心に位置していて，速度の大きさが最大となっている。

(1)	(2)	(3)

Ⅰ＜解答＞

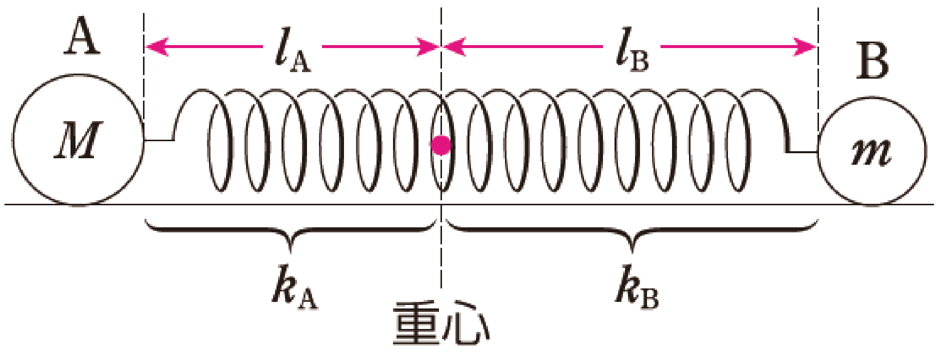
(1) $\dfrac{M}{M+m}v$	(2) $2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{(M+m)k}}$	(3) $\dfrac{Mv}{M+m}\sqrt{\dfrac{Mm}{(M+m)k}}$

Ⅰ＜解説＞

(1) 小球 A, B を 1 つの物体系と考えると，運動量保存の法則が成り立つ。このとき，A, B の重心の速度 v_G は一定になる。重心速度の式は，

$$v_G=\frac{Mv+m\times 0}{M+m}=\frac{M}{M+m}v$$

(2) ばねが自然の長さのとき，重心から A までの長さをl_A，重心から B までの長さを l_Bとすると，$l_A : l_B = m : M$の関係が成り立つ。



重心から右側の部分のばねについて，ばね定数をk_Bとする。一様なばねのばね定数は，ばねの長さに反比例するので，

$$k_B=\frac{l_A+l_B}{l_B}k=\frac{M+m}{M}k$$

B の単振動の周期 T_B は，$T_B=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_B}}=2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{(M+m)k}}$

(注) A の単振動の周期 T_Aを同様にして求めると，

$T_A=T_B$ となる。

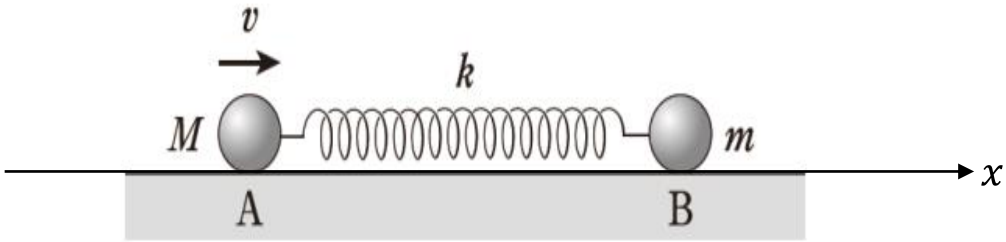
(3) A に速度を与えた瞬間，重心から見た B の速度は，振動の中心での速度であり，その大きさは最大値となっている。このときの重心から見た B の速度 v_{B}は，(1)の結果から，

$$v_{\mathrm{B}} = 0 - v_{\mathrm{G}} = -\frac{M}{M+m}v$$

B の振幅を A_{B}，角振動数をωとすると，$|v_{\mathrm{B}}| = A_{\mathrm{B}}\omega$から，(2)の結果を用いて，

$$A_{\mathrm{B}} = \frac{|v_{\mathrm{B}}|}{\omega} = \frac{|v_{\mathrm{B}}|T_{\mathrm{B}}}{2\pi} = \frac{Mv}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$$

Ⅱ 水平面上に，なめらかな溝をもつ直線のレールがある。この溝の中で，質量 M，m の小球 A，B を自然の長さ L，ばね定数 k のばねでつないで静止させた。ある瞬間に，A に大きさ v の右向きの速度を与えると，その後，A と B は，振動しながら全体として右向きに進んでいった。図の向きに x 座標をとり，ある時刻において，A，B の位置をそれぞれ x_1，x_2，A，B の加速度をそれぞれ a_1，a_2 とする。運動を始めた後について，次の各問に答えよ。



(1) A の運動方程式と B の運動方程式をそれぞれ書け。

(2) A に対する B の相対加速度，相対位置をそれぞれ a，x とする。a を，x，k，L，M，m だけを用いて表せ。

上の(2)で求めた関係から，A から見た B の運動は単振動であることがわかる。

(3) A から見た B の単振動の周期を求めよ。

(4) A から見た B の単振動の振幅を求めよ。

(1) A		B
(2)	(3)	(4)

Ⅱ＜解答＞

(1) A $Ma_1 = k(x_2 - x_1 - L)$	B $ma_2 = -k(x_2 - x_1 - L)$	
(2) $-\dfrac{M+m}{Mm}k(x-L)$	(3) $2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{(M+m)k}}$	(4) $v\sqrt{\dfrac{Mm}{(M+m)k}}$

Ⅱ＜解説＞

(1) $x_2 - x_1$ がばねの長さを表し，$x_2 - x_1 - L$ がばねの自然長からの伸びを表すから，弾性力の向きに注意すると，運動方程式は，

A： $Ma_1 = k(x_2 - x_1 - L)$ ・・・❶

B： $ma_2 = -k(x_2 - x_1 - L)$ ・・・❷

(2) $a = a_2 - a_1$ ，$x = x_2 - x_1$ なので，

❷式から $a_2 = -\dfrac{k(x-L)}{m}$ ，

❶式から $a_1 = \dfrac{k(x-L)}{M}$ として，

$$a = a_2 - a_1 = -\frac{k(x-L)}{m} - \frac{k(x-L)}{M}$$

$$= -\frac{M+m}{Mm}k(x-L) \quad \cdots ❸$$

(3)「$a = -\omega^2 x$」の関係があるので，❸式から，ω

$$= \sqrt{\frac{M+m}{Mm}k}$$ となる。

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{(M+m)k}}$

(4) ❸式から，Aから見たBの単振動の中心は $x = L$ で，はじめ，ばねは自然長であり，A に対する B の速度の大きさは v である。単振動の振幅を A とすると，「$v = A\omega$」の関係から，

$$\text{振幅 } A = \frac{v}{\omega} = v\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$$

<(2)の補足>

(2)を A に対する B の運動方程式から求めようとする人もいると思います。そのとき，相対加速度と相対位置を用いて，

$ma = -k(x-L)$ とすると間違いになります。なぜでしょうか？

A は a_1の加速度運動していますから，B には慣性力 $-ma_1$がはたらきます。したがって，

$ma = -k(x-L) - ma_1$が正しい運動方程式になります。

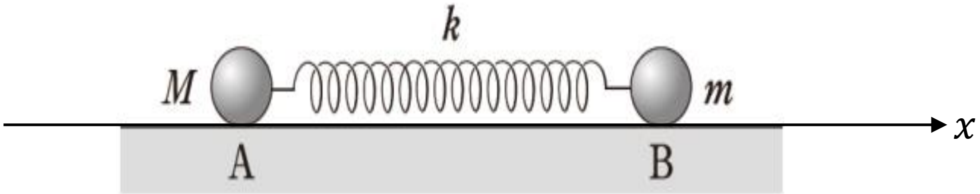
これから，$a = -\dfrac{k(x-L)}{m} - a_1$ となり，

❶から，$a_1 = \dfrac{k(x_2 - x_1 - L)}{M} = \dfrac{k(x-L)}{M}$ を代入すると，

$$a = -\frac{k(x-L)}{m} - \frac{k(x-L)}{M} = -\frac{M+m}{Mm}k(x-L)$$

となり，❸と同じ結果が得られます。

Ⅲ 水平面上に，なめらかな溝をもつ直線のレールがある。この溝の中で，質量 M, m の小球 A, B を自然の長さ L，ばね定数 k のばねでつなぎ，さらにばねを d だけ縮めて，A, B を糸で結んで静止させた。ある瞬間に，糸を静かに切ると，A と B は，振動を始めた。A と B の重心の位置を原点にして図の向きに x 座標をとり，ある時刻において，A, B の位置をそれぞれ x_1，x_2，A, B の加速度をそれぞれ a_1，a_2 とする。運動を始めた後について，次の各問に答えよ。



(1) A の運動方程式と B の運動方程式をそれぞれ書け。
(2) x_1，x_2 の間に成り立つ関係式を求めよ。
(3) B の運動方程式を，x_1 を用いずに表せ。
(4) B の単振動の周期を求めよ。
(5) B の単振動の中心の x 座標を求めよ。
(6) B の単振動の振幅を求めよ。
(7) B の単振動の中心における速さを求めよ。

Ⅲ(1)A	B
(2)	(3)
(4)	(5)
(6)	(7)

Ⅲ<解答>

Ⅲ(1) A: $Ma_1 = k(x_2 - x_1 - L)$	B: $ma_2 = -k(x_2 - x_1 - L)$
(2) $Mx_1 + mx_2 = 0$	(3) $ma_2 = -\frac{M+m}{M}k\left(x_2 - \frac{M}{M+m}L\right)$
(4) $2\pi\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$	(5) $\frac{M}{M+m}L$
(6) $\frac{M}{M+m}d$	(7) $d\sqrt{\frac{M}{(M+m)m}k}$

Ⅲ<解説>

(1) $x_2 - x_1$ がばねの長さを表し, $x_2 - x_1 - L$ がばねの自然長からの伸びを表すから, 弾性力の向きに注意すると, 運動方程式は,

A: $Ma_1 = k(x_2 - x_1 - L)$ ・・・❶

B: $ma_2 = -k(x_2 - x_1 - L)$ ・・・❷

(2)

水平方向には外力がはたらかないので, 重心の座標は 0 のまま変化しない。 $\frac{Mx_1 + mx_2}{M+m} = 0$

$Mx_1 + mx_2 = 0$ ・・・❸

(3) ❸式より, $x_1 = -\frac{m}{M}x_2$ として, ❷へ代入する。

$$ma_2 = -k\left(x_2 + \frac{m}{M}x_2 - L\right) = -k\left(\frac{M+m}{M}x_2 - L\right)$$

$$= -\frac{M+m}{M}k\left(x_2 - \frac{M}{M+m}L\right) \quad \cdots❹$$

(4) 一般的な単振動の復元力の式「$F = -k(x - x_0) = -m\omega^2(x - x_0)$」と比較して,

$$m\omega^2 = \frac{M+m}{M}k \qquad \omega = \sqrt{\frac{M+m}{Mm}k} \qquad \text{周期}\ T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$$

(5) ❹式より，単振動の中心は，

$$x = \frac{M}{M+m}L \ \left(\text{すなわち自然長のときの位置}\right)$$

(6) B の初めの位置は，$\dfrac{M}{M+m}(L-d)$ なので，

振幅は，$\dfrac{M}{M+m}L - \dfrac{M}{M+m}(L-d) = \dfrac{M}{M+m}d$

(7)「$v_0 = A\omega$」の関係式から，

$$\frac{M}{M+m}d \times \sqrt{\frac{M+m}{Mm}k} = d\sqrt{\frac{M}{(M+m)m}k}$$

$\boxed{\text{(7)別解}}$ ばねが自然長になったとき，A，B とも速さは最大になる。このとき，運動量が 0 であれば，ばねの弾性エネルギーが質量の逆比に分配される。したがって，求める B の速さをv_0とすれば，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{M}{M+m}\times\frac{1}{2}kd^2$$ これを解いて，v_0

$$= d\sqrt{\frac{M}{(M+m)m}k}$$