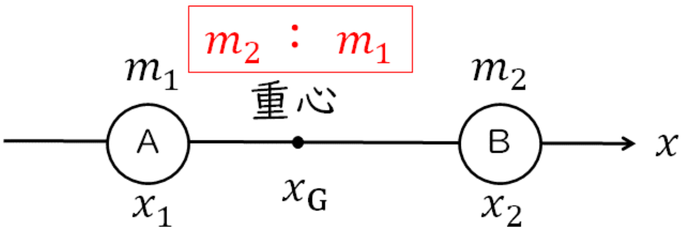
物体の運動を考えるとき，保存則を使うとびっくりするような解き方ができますね。
運動量保存則と重心をセットでまとめておきましょう。

❶保存則はなぜ有効なのか？

　力学的エネルギー保存則を思い出してください。保存則は，途中経過は省略して，結果としてどうなったかを示していましたね。ですから，保存則が成り立つ条件さえ満たしていれば，（言い過ぎかもしれませんが）ほぼ自動的に式が立てられるので，とても重宝するわけです。
　では，重心をキーワードにして考えていきましょう。

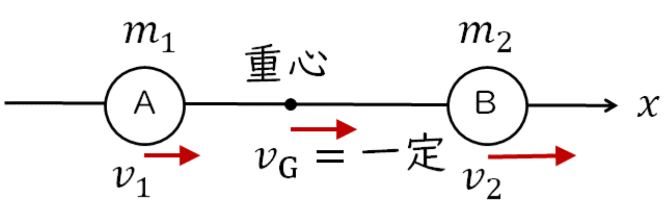
❷重心の座標について（直線上の議論）



重心座標は

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad \cdot\cdot ①$$

❸重心の速度について



①を t で微分すると

$$v_G = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad \cdot\cdot ②$$

x 方向について運動量保存則が成り立つならば，

$m_1v_1 + m_2v_2 =$ 一定　　したがって，重心速度 $v_G =$ 一定 となります。

運動量保存則が成り立つとき，重心速度は一定である。

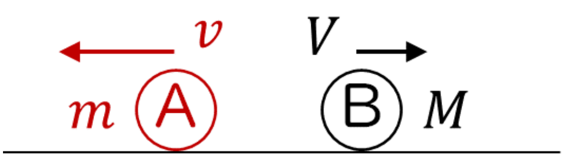
初め静止していて，運動量保存則が成り立つとき，

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \quad \cdot\cdot ③$$

③と力学的エネルギー保存の法則の組合せで簡単に解ける問題⇒<問題1>

ポイント：運動エネルギーは質量の逆比に分配される。

(ポイントの解説)なめらかな水平面上で，質量 m の物体Aと質量 M の物体Bで軽いばねを押し縮めて静止させる。同時に手を離したところ，ばねがはじけて反対向きにAは速さ v，Bは速さ V で進んでいった。両物体がばねからもらったエネルギーが全部で E だったとして，物体A, Bの運動エネルギーを求めてみよう。



運動量保存則から， $MV - mv = 0$

Aの運動エネルギー：Bの運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv^2 : \frac{1}{2}MV^2 = \frac{(mv)^2}{2m} : \frac{(MV)^2}{2M}$$

$$= \frac{(mv)^2}{2m} : \frac{(mv)^2}{2M} = M : m$$

重要

$\frac{1}{2}mv^2 : \frac{1}{2}MV^2 = M : m$ となるので， $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{M}{m+M}E$ 　 $\frac{1}{2}MV^2 = \frac{m}{m+M}E$

③と❻を使うと簡単に解ける問題⇒<問題2>

❹初め静止していて，運動量保存則が成り立つときの物体の変位について

③の式から，微小時間 Δt の間のAの変位を Δx_1，Bの変位を Δx_2 とすると，

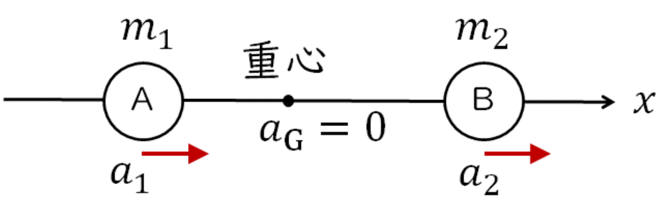
$$m_1\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta x_2}{\Delta t} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 = 0$$

初め静止していて，運動量保存の法則がなりたつとき，

$$m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 = 0 \qquad \cdot\cdot ④$$

④と❻を使うと簡単に解ける問題⇒<問題3>

❺重心の加速度について



②を t で微分すると

$$a_G = \frac{m_1a_1 + m_2a_2}{m_1 + m_2}$$

運動量保存の法則がなりたつとき，$v_G =$ 一定 なので，重心加速度 $a_G = 0$ になる。

運動量保存の法則がなりたつとき，

$$m_1a_1 + m_2a_2 = 0 \qquad \cdot\cdot ⑤$$

⑤と❻を使うと簡単に解ける問題⇒<問題4>

❻位置の合成，速度の合成，加速度の合成

位置の合成

$$\overrightarrow{x_{\mathrm{B}}} = \overrightarrow{x_{\mathrm{A}}} + \overrightarrow{x_{\mathrm{AB}}}$$

相対位置

$$\overrightarrow{x_{\mathrm{AB}}} = \overrightarrow{x_{\mathrm{B}}} - \overrightarrow{x_{\mathrm{A}}}$$

t で微分する

速度の合成

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{B}}} = \overrightarrow{v_{\mathrm{A}}} + \overrightarrow{v_{\mathrm{AB}}}$$

相対速度

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{AB}}} = \overrightarrow{v_{\mathrm{B}}} - \overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}$$

t で微分する

加速度の合成

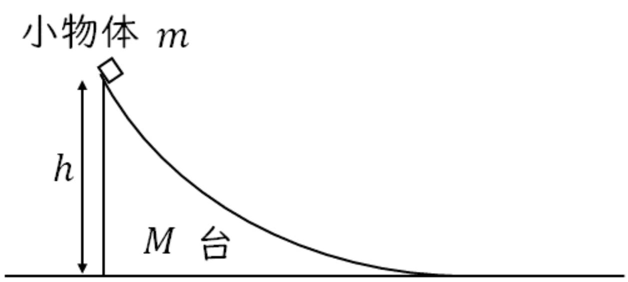
$$\overrightarrow{a_{\mathrm{B}}} = \overrightarrow{a_{\mathrm{A}}} + \overrightarrow{a_{\mathrm{AB}}}$$

相対加速度

$$\overrightarrow{a_{\mathrm{AB}}} = \overrightarrow{a_{\mathrm{B}}} - \overrightarrow{a_{\mathrm{A}}}$$

<問題１>摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g とする。

なめらかな水平面上で全体が静止した状態から，図のように小物体を台上ですべらせる。小物体が水平面上に達したときの小物体と台の速さを求めよ。



（解答）小物体が水平面上に達したときの小物体の右向きの速さを v，台の左向きの速さを V とする。水平方向の運動量が保存されるから，右向きを正として，

$$mv - MV = 0 \qquad \cdots(1)$$

力学的エネルギーが保存されるから，　$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 = mgh \qquad \cdots(2)$

普通に解けばよいのですが，知っておくといいかもしれない解き方は，

$$(2)\text{より，}\quad \frac{(mv)^2}{2m} + \frac{(MV)^2}{2M} = mgh$$

$$(1)\text{を代入して，}\quad \frac{(mv)^2}{2m} + \frac{(mv)^2}{2M} = mgh \Rightarrow \frac{(m+M)(mv)^2}{2mM} = mgh$$

$$\text{解いて，}\ v = \sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}} \qquad (1)\text{を用いて，}\ V = \frac{m}{M}v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}} = m\sqrt{\frac{2gh}{M(m+M)}}$$

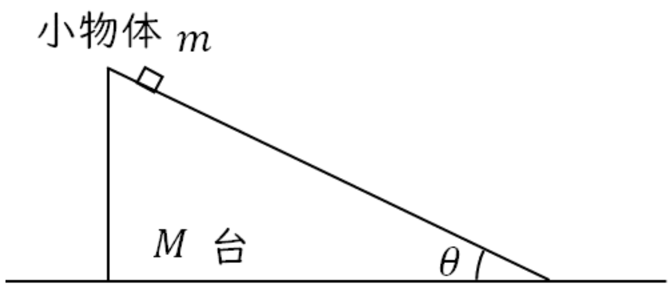
（別解）最初静止していたなら，運動エネルギーは質量の逆比に分配されるので，

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{M}{m+M} \times mgh \qquad v = \sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{m}{m+M} \times mgh \qquad V = m\sqrt{\frac{2gh}{M(m+M)}}$$

<問題2>摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g とする。

なめらかな水平面上で全体が静止した状態から，図のように小物体を台上ですべらせる。台から見て小物体が速さ v ですべりおりているとき，台が左向きに動く速さ V はいくらか。

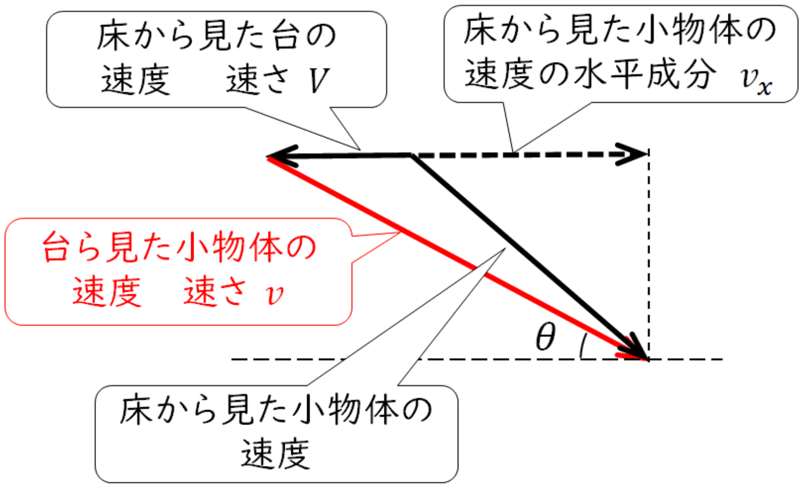


（解答）「初め静止していて，運動量保存則が成り立つとき，

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$ 」

という関係を用います。

右の図に当てはめると，



$$mv_x - MV = 0$$

ですが，$v_x = v\cos\theta - V$

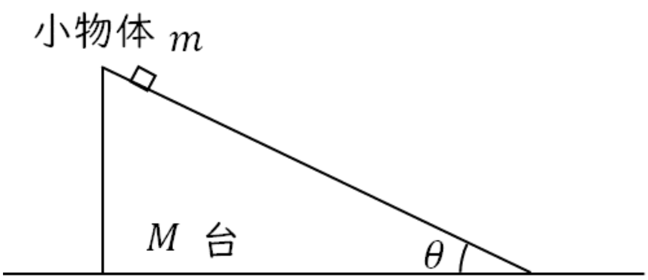
なので，

$$m(v\cos\theta - V) - MV = 0$$

$$mv\cos\theta = (m+M)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m\cos\theta}{m+M}v$$

<問題3>摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g とする。

なめらかな水平面上で全体が静止した状態から，図のように小物体を台上ですべらせる。台から見て小物体が斜面を距離 l だけすべりおりたとき，台が左向きに動いた距離 L はいくらか。

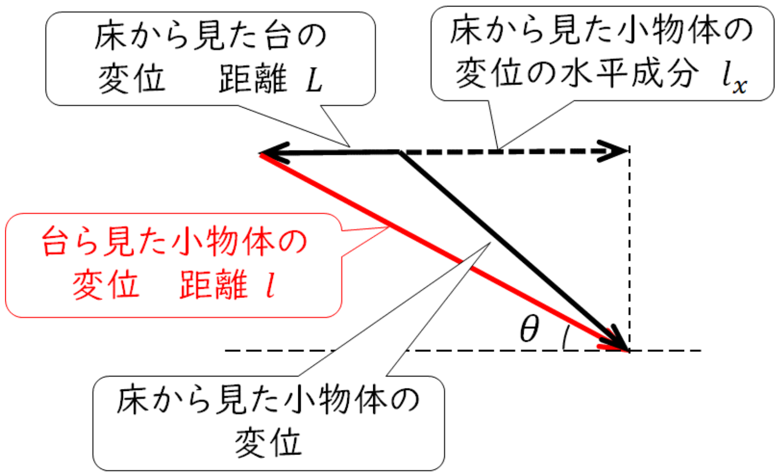


（解答）「初め静止していて，運動量保存則が成り立つとき，

$$m_1 \varDelta x_1 + m_2 \varDelta x_2 = 0$$ 」

という関係を用います。

右の図に当てはめると，



$$ml_x - ML = 0$$

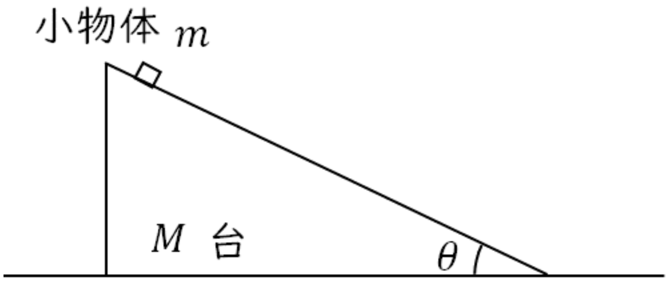
ですが，$l_x = l\cos\theta - L$

なので，$m(l\cos\theta - L) - ML = 0$

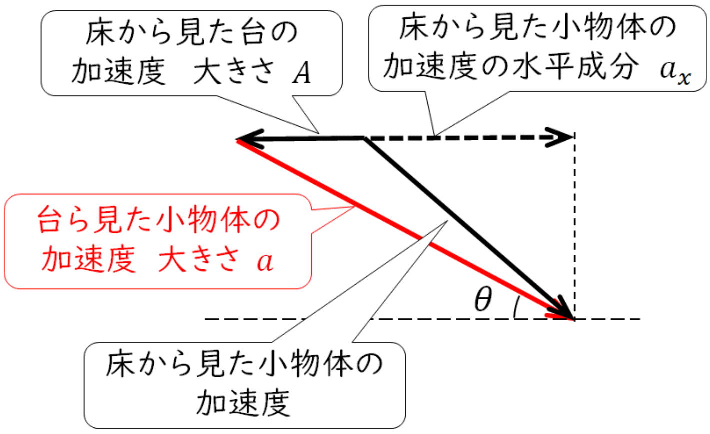
$$ml\cos\theta = (m+M)L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{m\cos\theta}{m+M}l$$

<問題4>摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g とする。

なめらかな水平面上で全体が静止した状態から，図のように小物体を台上ですべらせる。台から見て小物体が斜面を加速度の大きさ a ですべりおりているとき，台の左向きの加速度の大きさ A はいくらか。



(解答)「運動量保存則が成り立つとき，$m_1a_1+m_2a_2=0$ 」という関係を用います。



右の図に当てはめると,

$$ma_x-MA=0$$

ですが，$a_x=a\cos\theta-A$

なので，$m(a\cos\theta-A)-MA=0$

$$ma\cos\theta=(m+M)A \quad\Rightarrow\quad A=\frac{m\cos\theta}{m+M}a$$