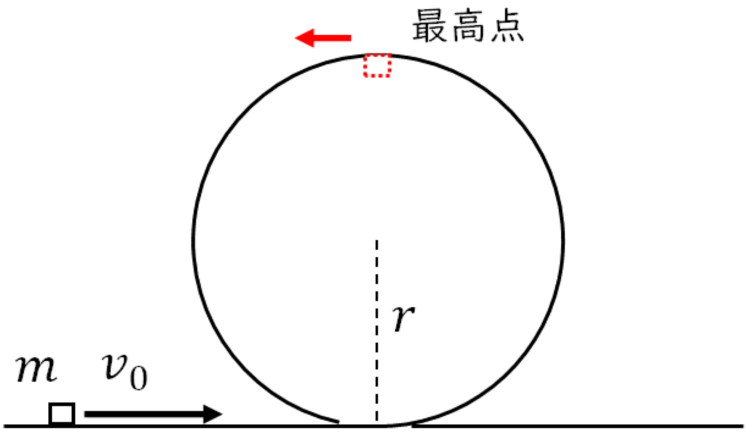
鉛直面内の円運動は,速さが変わりますが,向心力や遠心力は等速円運動と同じように適用できます。力学的エネルギー保存則とあわせて考えていきます。

❶下図のような宙返りコースターを考えましょう。物体が半径rのレールの最高点を回るための条件を考えましょう。

①「最高点で速さ0以上であればよい」という考えではうまくいきません。
(振り子で実演をします)



②振り子だとどのようなことが起こりましたか。

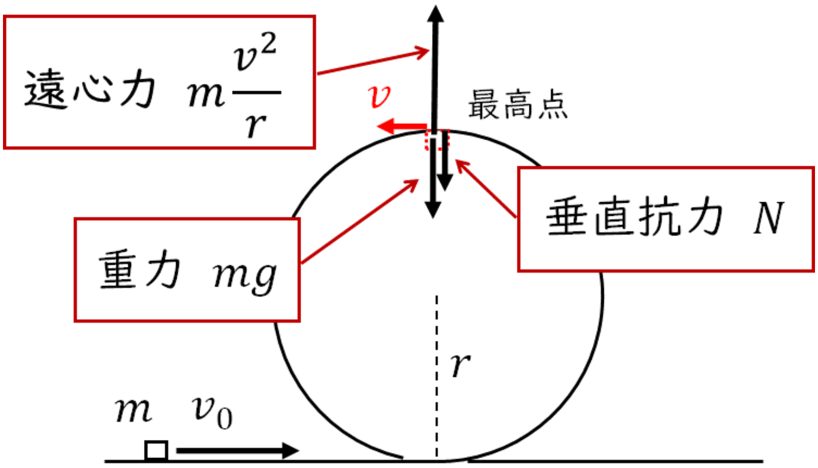
途中で糸がたるんでおもりが円軌道から外れてしまった。

③宙返りコースターで「最高点までいくための条件」としてどのような条件をつければよいと思いますか。

最高点で円筒面からの垂直抗力が0以上である。

④<問題1>最高点を通過するのに必要な初速 v_0 の範囲を求めましょう。重力加速度の大きさはgとします。

(解答)



最高点での速さを v としたとき，物体とともに回転する観測者は，右の図のように力がはたらいて，半径方向で力がつりあっていると考えます。

v と v_0 とは力学的エネルギー保存の法則を使えばすぐに求められます。まず，v の満たすべき条件を求めましょう。

半径方向のつりあいの式は， $mg + N - m\dfrac{v^2}{r} = 0 \quad \cdots(1)$

最高点を通過するために，$N \geqq 0$ が条件になる。(1)より

$$N = m\frac{v^2}{r} - mg \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 \geqq gr \quad \cdots(2)$$

ここで，v と v_0 との関係は力学的エネルギー保存の法則より，次のようになります。

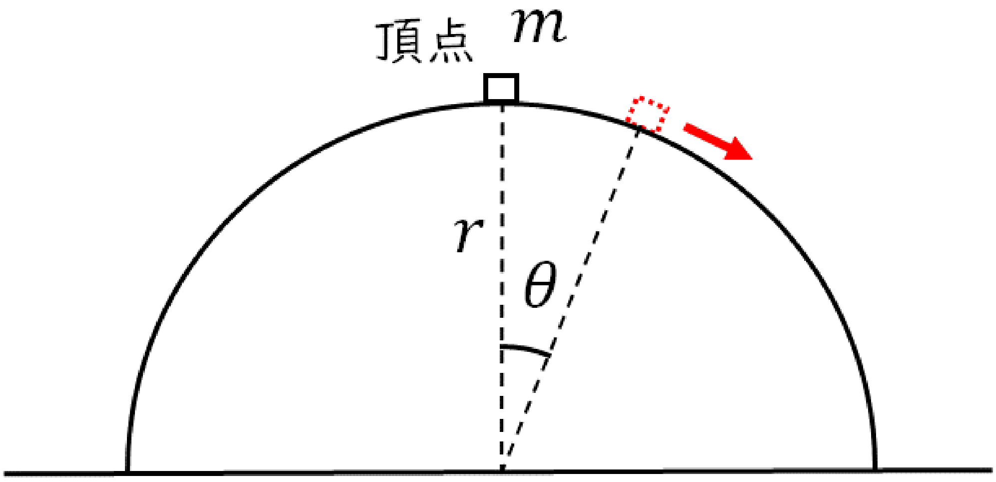
$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg\cdot 2r \quad \Rightarrow \quad v^2 = {v_0}^2 - 4gr \quad \cdots(3)$$

(2)と(3)より，

$${v_0}^2 - 4gr \geqq gr \quad \Rightarrow \quad {v_0}^2 \geqq 5gr \quad \Rightarrow \quad v_0 \geqq \sqrt{5gr}$$

(少々道のりが長いのですが，話の筋道をしっかりと理解すれば間違いなく解き進めることができます。)

❷図のようになめらかな半円筒面に沿って，最高点(頂点)から小物体をすべらせます。やがて，小物体は円筒面を離れて放物運動をするようになります。重力加速度の大きさを g として考えましょう。

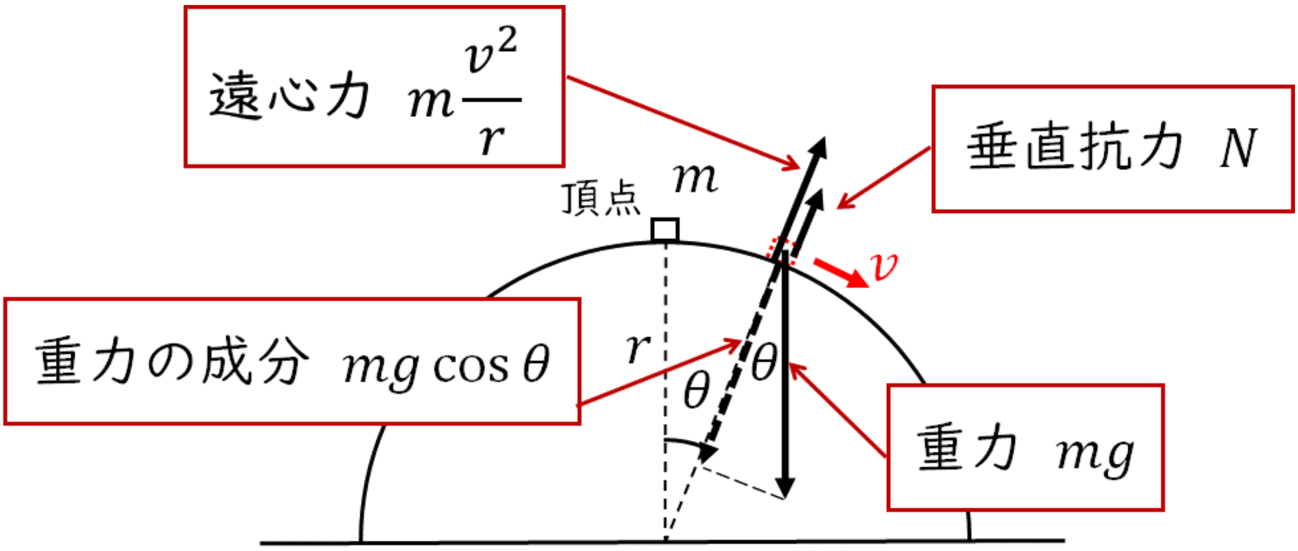


<問題2>

(1)小物体が円筒面に沿ってすべっている間について，図の角が θ のときに小物体が円筒面から受ける垂直抗力の大きさを求めなさい。

(解答)

θ のときの小物体の速さを v としたとき，小物体とともに回転する観測者は，下の図のように力がはたらいて，半径方向で力がつりあっていると考えます。



半径方向のつりあいの式 $mg\cos\theta - N - m\frac{v^2}{r} = 0$ ①

これより， $N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{r}$ ･･･②

次に v^2 を求めます。力学的エネルギー保存の法則から，θの位置を高さの基準にすると，

$$mgr(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gr(1-\cos\theta) \quad ･･③$$

②と③より，

$$N = mg\cos\theta - m\frac{2gr(1-\cos\theta)}{r}$$

$$\Rightarrow N = mg(3\cos\theta - 2) \quad ･･･④$$

（2）小物体が円筒面を離れるときの角度 θ を θ_0 とする。

$\cos\theta_0$ の値を求めなさい。

（解答）小物体が円筒面を離れるのは，$N=0$ となったときです。$\theta = \theta_0$ のとき，$N=0$ なので，④より，

$$0 = mg(3\cos\theta_0 - 2) \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$