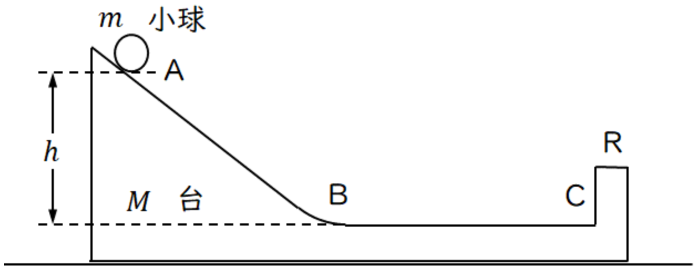
ここでは少し,難しい問題を取り扱ってみましょう。基本的な考え方をしっかりと適用すれば,あとは計算をしっかりやればみんなできるようになります。

❶水平成分だけが保存される運動

次のような運動について理解を深めておきましょう。

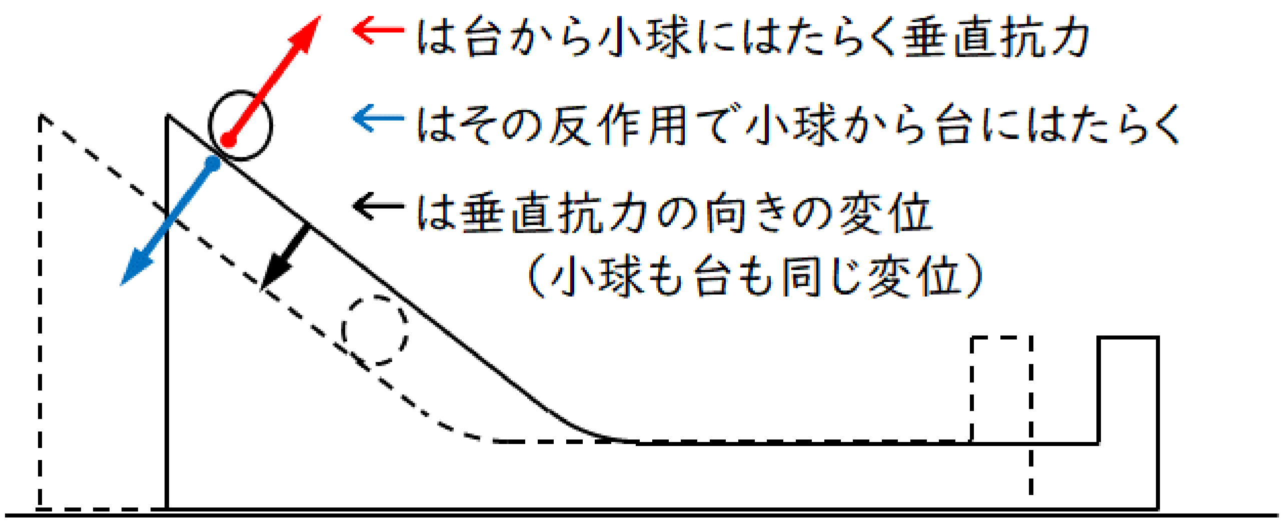
なめらかな水平面上に,図のようになめらかな斜面を持つ台をおく。BCは水平で,Cには鉛直な壁Rがある。斜面上の h の高さから小球を静かにすべらせる。



<問1>小球と台の物体系を考えると,水平方向の運動量の和が保存されます。その理由を説明してください。

(説明)小球と台に対してはたらく力のうち,水平方向の成分を持つのは,下図のように,小球と台の間ではたらく垂直抗力だけです。この力は,作用反作用の関係にあり,この力積は小球と台をあわせると0になります。したがって,小球と台の物体系を考えると,水平方向の運動量の変化量の和が0になるので,保存されます。

<問2>この運動では,小球と台の力学的エネルギーの和も保存されます。右の図を参考にして,その理由を説明してください。

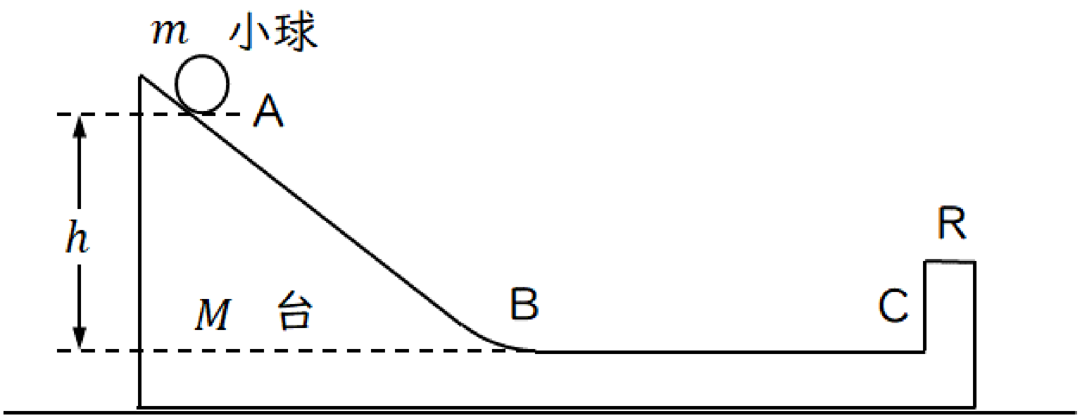


(説明)まず,「垂直抗力は,移動する向きと垂直なので,仕事は0であり,摩擦力もないので,力学的エネルギーは保存される。」は正しいのでしょうか。これは,物理基礎でよく使った論法ですが,この問題では誤りです。何がおかしいのか,わかるでしょうか。

「垂直抗力は,移動する向きと垂直」という部分が違っています。上の図で台が左向きに移動するために,「垂直抗力と移動する向きは垂直ではない」のです。したがって,垂直抗力(赤矢印)は小球に対して負の仕事をし,その反作用の力(青矢印)は台に対して正の仕事をすることがわかります。その仕事の和は0になるので,物体系に対する仕事の和は0になります。したがって,物体系としてみると,力学的エネルギーは保存されます。

❷運動量保存の法則と重心の運動

上の❶の例で，はじめに全体が静止した状態で，高さ h から小球をはなしたとしましょう。小球の質量は m，台の質量は M，重力加速度の大きさは g とします。



<問題>

(1) 最初に小球が水平面に達したとき，小球は右向きに速さ v，台は左向きに速さ V で運動しました。水平方向の運動量保存の法則の式を，右向きを正として書いてください。

$$0 = mv - MV \quad \cdots ①$$

(2) 小球をはなしたときと，(1) のときとで力学的エネルギー保存の法則の式を書いてください。重力による位置エネルギーは，BC 面の高さを基準の高さとします。

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad \cdots ②$$

(3) (1) の式と (2) の式を解いて，v と V を求めてください。

(説明) 解き方に慣れましょう。①から $V =$ ・・・として，②へ代入して解くのが分かりやすくて簡単だと思います。ここでは，少し違った方法を紹介します。

$$②から\quad mgh = \frac{(mv)^2}{2m} + \frac{(MV)^2}{2M}$$

①を用いて $mgh=\dfrac{(mv)^2}{2m}+\dfrac{(mv)^2}{2M}=\dfrac{m^2(m+M)}{2mM}v^2$

$$=\frac{m(m+M)}{2M}v^2$$

$$v^2=\frac{2Mgh}{m+M}\qquad v=\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}\quad\cdots③$$

①を用いて $V=\dfrac{m}{M}v=m\sqrt{\dfrac{2gh}{M(m+M)}}\quad\cdots④$

(4) 小球と壁との間の反発係数を e とするとき，小球が壁に当たって，はね返った後の小球の速さを v'，台の速さを V'とすると，v'と V'を求めてください。

（説明）これは，(3)より，一段と面倒な計算になります。簡単にできた人は本当にすばらしい。うまくいかなかった人も何回か計算を追いかけて，大丈夫になってほしいです。

鉄則は見通しを立てて，ゴールを見据えて計算をやり向くことです。

まず，衝突後に小球は左向きに速さ v' となり，台は右向きに速さ V' になると仮定しましょう。水平方向の運動量保存の法則は，

$$mv-MV=-mv'+MV'$$

となりますが，(1) にさかのぼれば，次のようになります。

$$0=-mv'+MV'\quad\cdots⑤$$

次に反発係数の式は，

$$e=-\frac{(-v')-V'}{v-(-V)}=-\frac{-v'-V'}{v+V}\quad\cdots⑥$$

簡単のため，$e(v+V)=k$ と置くと，

⑥は，$k=v'+V'$ ・・・⑦となります。

⑤と⑦から，$v'=\dfrac{Mk}{m+M}$　$V'=\dfrac{mk}{m+M}$

が求められます。（途中計算は省略）

ところで，$k=e(v+V)=e\left(v+\dfrac{m}{M}v\right)$

$$=e\frac{M+m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}\quad\cdots⑦$$

これより，$v'=e\sqrt{\dfrac{2Mgh}{m+M}}$　　$V'=\dfrac{em}{M}\sqrt{\dfrac{2Mgh}{m+M}}$

（5）壁ではね返った後，小球が斜面を再び上るときの最高点の高さはBC面からいくらでしょうか。

（説明）最高点では，小球と台の速度は等しくなる。重心は静止しているから，最高点で，小球と台の速度は0になる。求める最高点の高さを h' とすると，壁と衝突した後について力学的エネルギー保存の法則が成り立つので，

$$\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV'^2=mgh'$$

$$\frac{1}{2}m\left(e\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{em}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}\right)^2=mgh'$$

$$\frac{1}{2}me^2\frac{2Mgh}{m+M}+\frac{1}{2}M\left(\frac{em}{M}\right)^2\frac{2Mgh}{m+M}=mgh'$$

$$me^2\frac{Mgh}{m+M}+(em)^2\frac{gh}{m+M}=mgh'$$

$$e^2mgh=mgh' \qquad h'=e^2h$$

＜（5）別解＞（4）で，$v'=ev$　$V'=eV$ になることに気づいたなら，力学的エネルギー保存の法則は，

$$mgh'=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV'^2=e^2\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2\right)$$

$$=e^2mgh$$

$$h'=e^2h$$