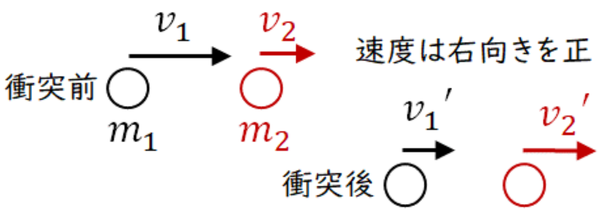
物体が衝突するとき，運動量は保存されますが，力学的エネルギーは保存されません。なんでもかんでも保存されるわけではありません。

❶反発係数と失われる力学的エネルギー



超えるプリント「12反発係数❸」で計算した結果から，衝突によって失われた力学的エネルギーを求めてみましょう。

速度 $v_1{}'$，$v_2{}'$ を v_1，v_2，m_1，m_2，e で表すと，次のようになりました。

$$v_1' = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2{}' = \frac{(1+e)m_1v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

この衝突によって失われた力学的エネルギーを $\varDelta E$ とすると。

$$\varDelta E = \left(\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1{v_1}'^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}'^2\right)$$
$$= (1-e^2)\frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

となります。

この計算は，計算大好きという人でも10分程度，普通だと答えを出すまでに1時間や2時間はかかるでしょう。結果を与えられていなければ，最後までたどり着けないのがむしろ普通かもしれません。ですから，しなくて構いません。また，出題する際には，質量を同じにしたり，一方を静止させておいたりして，計算が簡単になるようにしますので安心してください。

（補足）複数物体の運動を全体の重心の運動と，重心に対する各物体の運動というように分けると，計算がずっと楽になることが知られています。

❷反発係数による衝突の分類

☆弾性衝突　$e = 1$

・力学的エネルギー（ここでは，運動エネルギー）の和が保存されます。

・運動量保存の法則と反発係数の式の代わりに，運動量保存の法則と力学的エネルギー保存の法則から計算ができます。

☆非弾性衝突　$0 \leqq e < 1$

・力学的エネルギーが減少する衝突です。

☆完全非弾性衝突　$e = 0$

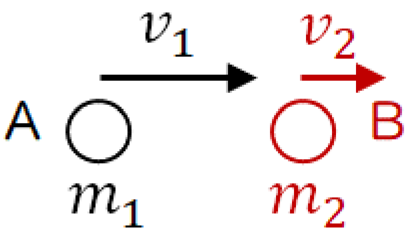
・力学的エネルギーが減少する衝突です。

・衝突後一体となるので，衝突後の両物体の速度が等しくなります。

・非弾性衝突の中の特別な場合です。

❸重心の運動と重心に対する運動の分離

<練習>　一直線上で2球が図のように運動しています。右向きを正として，次の問いに答えてください。（計算練習と思ってください。式を追いかけることができたら OK です。）



(1) 重心 G の速度 V_G を求めてください。

$$V_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

運動量が保存されていれば，重心は等速直線運動をします。

(2) 重心 G に対する A の相対速度 V_1 を求めてください。

$$V_1 = v_1 - V_G = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

(3) 重心 G に対する B の相対速度 V_2 を求めてください。

$$V_2 = v_2 - V_G = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

対称性を考えれば，(2)の答えの添え字の1と2を入れ換えればよいだけです。

（4）次の式を確かめてください。

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2){V_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m_1{V_1}^2+\frac{1}{2}m_2{V_2}^2=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2$$

一番大変な計算を先にやってみましょう。左辺は，

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{1}{2}m_1\left\{\frac{m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2}\right\}^2$$
$$+\frac{1}{2}m_2\left\{-\frac{m_1(v_1-v_2)}{m_1+m_2}\right\}^2$$

$$=\frac{(m_1+m_2)(m_1v_1+m_2v_2)^2+m_1m_2(m_1+m_2)(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)^2}$$
$$=\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2+m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$$

$$=\frac{{m_1}^2{v_1}^2+2m_1m_2v_1v_2+{m_2}^2{v_2}^2+m_1m_2({v_1}^2-2v_1v_2+{v_2}^2)}{2(m_1+m_2)}$$
$$=\frac{m_1(m_1+m_2){v_1}^2++m_2(m_1+m_2){v_2}^2}{2(m_1+m_2)}$$
$$=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2$$

（補足）複数物体の運動エネルギーの和は，重心に全質量が集まったとしての運動エネルギーと，重心に対する各物体の運動による運動エネルギーとの和で表すことができるのです。

＜（4）別の計算の例＞

実は，もう少し楽にできました。左辺は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(m_1+m_2){V_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m_1(v_1-V_\mathrm{G})^2+\frac{1}{2}m_2(v_2-V_\mathrm{G})^2\\
&\quad=\frac{1}{2}(m_1+m_2){V_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m_1{v_1}^2-m_1v_1V_\mathrm{G}+\frac{1}{2}m_1{V_\mathrm{G}}^2\\
&\qquad\quad+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2-m_2v_2V_\mathrm{G}+\frac{1}{2}m_2{V_\mathrm{G}}^2\\
&\quad=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2){V_\mathrm{G}}^2\\
&\qquad\quad+\frac{1}{2}(m_1+m_2){V_\mathrm{G}}^2-(m_1v_1+m_2v_2)V_\mathrm{G}\\
&\quad=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2+(m_1+m_2){V_\mathrm{G}}^2\\
&\qquad\quad-(m_1+m_2)V_\mathrm{G}V_\mathrm{G}\\
&\quad=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{V_\mathrm{G}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}}$$

話の流れとしては，右辺から左辺を導く方が自然かもしれませんね。それをやっておきましょう。

（1）（2）（3）の結果再掲

$$V_\mathrm{G}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\qquad V_1=v_1-V_\mathrm{G}\qquad V_2=v_2-V_\mathrm{G}$$

右辺は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2\\
&\quad=\frac{1}{2}m_1(V_\mathrm{G}+V_1)^2+\frac{1}{2}m_2(V_\mathrm{G}+V_2)^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2} m_1 {V_\mathrm{G}}^2 + m_1 V_\mathrm{G} V_1 + \frac{1}{2} m_1 {V_1}^2$$
$$+ \frac{1}{2} m_2 {V_\mathrm{G}}^2 + m_2 V_\mathrm{G} V_2 + \frac{1}{2} m_2 {V_2}^2$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2){V_\mathrm{G}}^2 + (m_1 V_1 + m_2 V_2) V_\mathrm{G} + \frac{1}{2} m_1 {V_1}^2$$
$$+ \frac{1}{2} m_2 {V_2}^2$$

$(m_1 V_1 + m_2 V_2)$はどうなるのでしょうか。

$$(m_1 V_1 + m_2 V_2) = \{m_1(v_1 - V_\mathrm{G}) + m_2(v_1 - V_\mathrm{G})\}$$
$$= m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) V_\mathrm{G}$$
$$= 0$$

になります。重心から見れば運動量の和は0なのです。気がつきにくいかもしれませんが，目標の式が与えられていればできるでしょう。したがって，

$$\frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2){V_\mathrm{G}}^2 + \frac{1}{2} m_1 {V_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {V_2}^2$$

❶に戻って，衝突によって失われたエネルギーを求めるには，

$$V_1' = v_1' - V_\mathrm{G} = -eV_1 \qquad V_2' = v_2' - V_\mathrm{G} = -eV_2$$

になることをまず確かめれば，後は簡単にできます。

（計算好きの人はやってみると良い。）