物体の運動を考えるとき，物理特有の考え方があります。そういった考え方の枠組みを意識すると，理解がぐっと深くなります。

❶相対運動の見方

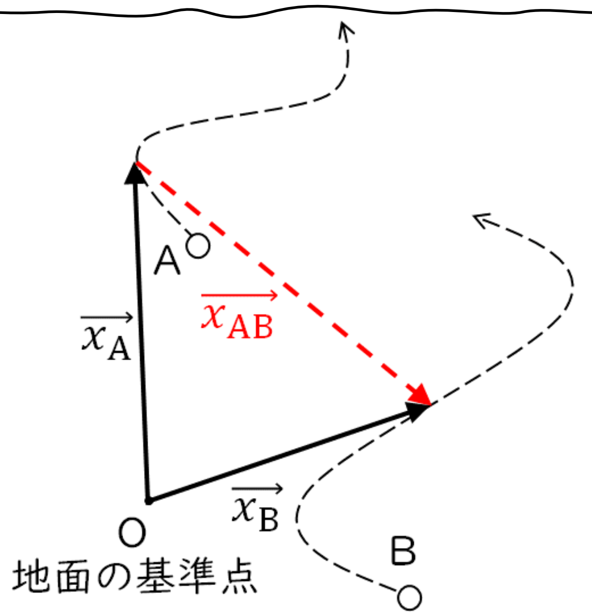
(1) 位置ベクトルの関係

位置ベクトルの合成

$$\overrightarrow{x_A} + \overrightarrow{x_{AB}} = \overrightarrow{x_B}$$

相対位置

$$\overrightarrow{x_{AB}} = \overrightarrow{x_B} - \overrightarrow{x_A}$$



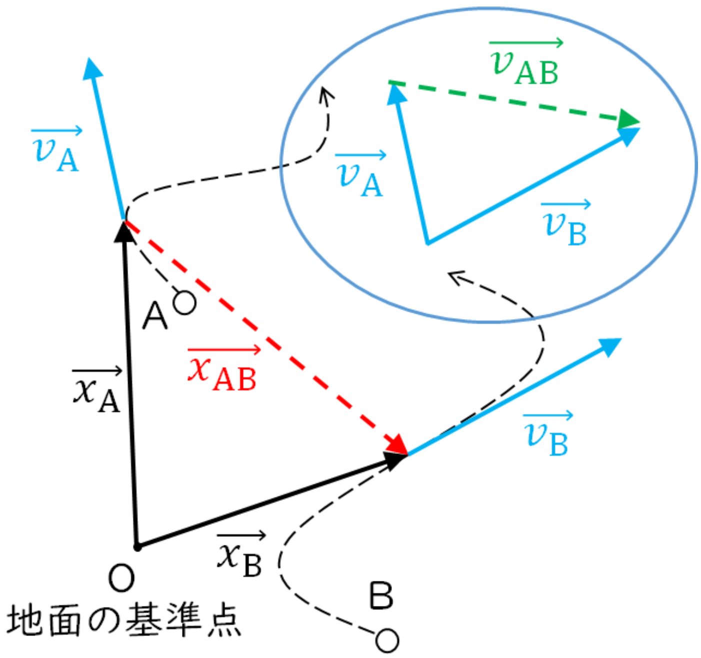
(2) 速度ベクトルの関係

速度の合成

$$\overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_B}$$

相対速度

$$\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$$



(説明) $\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$ の導出

(1)の時刻では，$\overrightarrow{x_{AB}} = \overrightarrow{x_B} - \overrightarrow{x_A}$･･･①

Δt後の位置ベクトルをそれぞれ$\overrightarrow{x_A'}$，$\overrightarrow{x_B'}$とすると，$\overrightarrow{x_{AB}'} = \overrightarrow{x_B'} - \overrightarrow{x_A'}$･･･②

$$\frac{②-①}{\Delta t} \quad \frac{\overrightarrow{x_{AB}'} - \overrightarrow{x_{AB}}}{\Delta t} = \frac{\left(\overrightarrow{x_B'} - \overrightarrow{x_B}\right) - \left(\overrightarrow{x_A'} - \overrightarrow{x_A}\right)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{x_B'} - \overrightarrow{x_B}}{\Delta t} - \frac{\overrightarrow{x_A'} - \overrightarrow{x_A}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta \overrightarrow{x_{AB}}}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{x_B} - \Delta \overrightarrow{x_A}}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{x_B}}{\Delta t} - \frac{\Delta \overrightarrow{x_A}}{\Delta t}$$

これより，$\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$が導かれた。

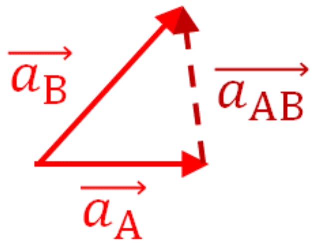
(3) 加速度ベクトルの関係

加速度の合成

$$\overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{AB}} = \overrightarrow{a_B}$$

相対加速度

$$\overrightarrow{a_{AB}} = \overrightarrow{a_B} - \overrightarrow{a_A}$$



(説明) $\overrightarrow{a_{AB}} = \overrightarrow{a_B} - \overrightarrow{a_A}$ の導出

(1)の時刻では, $\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$･･･③

Δt後の速度ベクトルをそれぞれ$\overrightarrow{v_A{}'}$, $\overrightarrow{v_B{}'}$とすると, $\overrightarrow{v_{AB}{}'} = \overrightarrow{v_B{}'} - \overrightarrow{v_A{}'}$･･･④

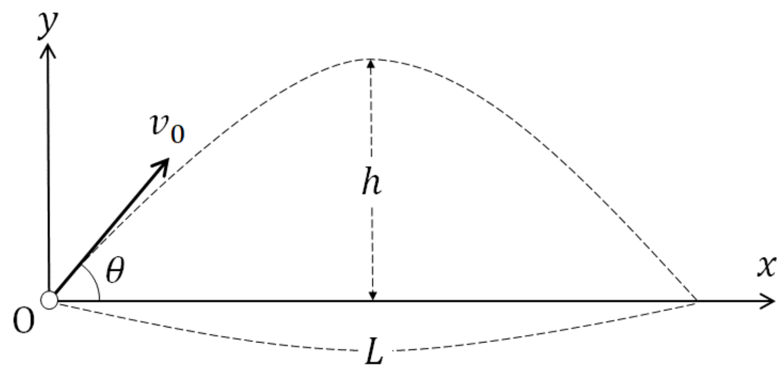
$$\frac{④-③}{\Delta t} \quad \frac{\overrightarrow{v_{AB}{}'} - \overrightarrow{v_{AB}}}{\Delta t} = \frac{\left(\overrightarrow{v_B{}'} - \overrightarrow{v_B}\right) - \left(\overrightarrow{v_A{}'} - \overrightarrow{v_A}\right)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_B{}'} - \overrightarrow{v_B}}{\Delta t} - \frac{\overrightarrow{v_A{}'} - \overrightarrow{v_A}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\overrightarrow{v_{AB}}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_B} - \Delta\overrightarrow{v_A}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_B}}{\Delta t} - \frac{\Delta\overrightarrow{v_A}}{\Delta t}$$

これより, $\overrightarrow{a_{AB}} = \overrightarrow{a_B} - \overrightarrow{a_A}$が導かれた。

❷斜方投射　水平方向:等速直線運動　鉛直方向:鉛直投げ上げ運動

<問題>図のように,原点から小物体を水平から θ だけ上方に向けて速さ v_0 で投射しました。重力加速度の大きさは g とします。



(1) 初速度の x 成分 v_{0x} と y 成分 v_{0y} はいくらですか。

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

(2) 投射してから小物体が最高点に達するまでの時間 t はいくらですか。

鉛直方向の運動だけを考える。最高点では鉛直方向の速度成分は0なので,

$$0 = v_0 \sin\theta - gt \qquad t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

(3) 最高点の高さ h はいくらですか。

「$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$」を使うのが基本ですが，発想を変えて最高点からの自由落下で計算してみましょう。落下時間は(2)で求めた $t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$ と同じになります。

自由落下で考えると，

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

(4) 投射してから小物体がもとの高さに戻るまでの時間 t' はいくらですか。

運動の対称性（最高点に対して対称性がある）から，

$$t' = 2t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

(5) 小物体の水平到達距離 L はいくらですか。

水平方向の運動だけを考える。水平方向には等速直線運動だから，

$$L = v_0 \cos\theta \cdot t' = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2{v_0}^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

ただし，$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を知っているのなら，

$$L = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$$

としても問題ありません。

(6) v_0が一定のとき，水平到達距離 L は θ が何度のときに最大になりますか。ただし，$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ であることを用いなさい。

ここでは，$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を使って変形しておかないと，今までに学んでいる数学の知識だけでは最大値は求められません。

$L = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$ の式を見ると，変数は θ だけなので，$\sin 2\theta$ が最大になればよい。

$\sin 2\theta$ の最大値は1で $\theta = 45°$ のときであることがわかります。

(7) 最大水平到達距離 L_0 はいくらですか。

$$L_0 = \frac{{v_0}^2 \sin(2 \times 45°)}{g} = \frac{{v_0}^2}{g}$$