

板に物体を載せて傾けていくとどうなるでしょうか。滑りだすのでしょうか、倒れるのでしょうか? 直方体を例にとって、その条件を考えてみましょう。

<例題>質量 m の直方体(辺の長さ a, b) を板に載せて、傾き θ を大きくしていきましよう。直方体と板との間の静止摩擦係数は μ とします。

①倒れる直前はどのような状態だろうか

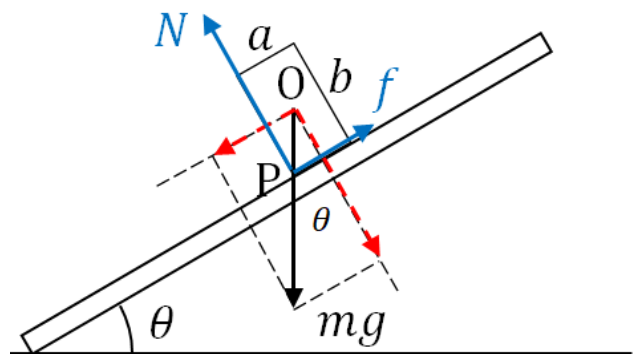
(滑りださないものとして、次の順番で考えましょう)

(解答)

(1)倒れるときには点Pを軸として倒れるので、垂直抗力と摩擦力の作用点はどこになりますか。

点P 倒れるとき、斜面に接しているのは点Pだけだからです。

(2)傾きが θ のとき、重力の点Pのまわりの力のモーメントを求めてください。



$$mg \sin \theta \cdot \frac{b}{2} - mg \cos \theta \cdot \frac{a}{2}$$

(3)上の(2)が0になるときが倒れる直前です。そのときの $\tan \theta$ はいくらですか。

$$mg \sin \theta \cdot \frac{b}{2} - mg \cos \theta \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad \tan \theta = \frac{a}{b}$$

(4)倒れる直前には、物体にはたらく重力の作用線が点Pを通ることを確かめなさい。

$\tan \theta$ の値が直方体の対角線の傾きと一致するので、重力の作用点は点Pを通る。

②滑りだす直前はどのような状態だろうか(倒れないものとして、次の順番で考えましょう)

(解答)

(1)傾きが θ のとき、物体が受ける垂直抗力の大きさ N はいくらですか。

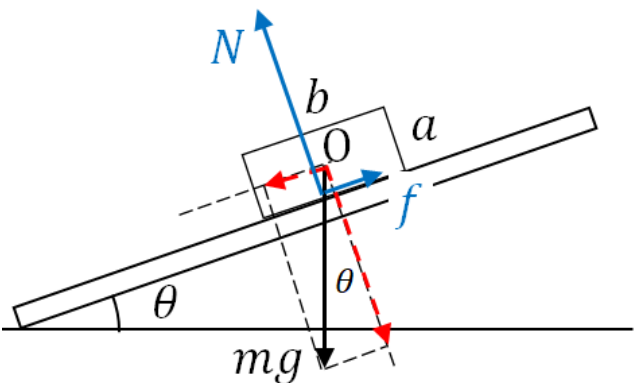
斜面に垂直な方向の力のつりあいから、

$$N = mg \cos \theta$$

(2)傾きが θ のとき、物体が受ける静止摩擦力の大きさ f はいくらですか。

斜面に平行な方向の力のつりあいから、

$$f = mg \sin \theta$$



(3) 滑りだす直前には、 f が最大摩擦 force になっています。そのときの $\tan \theta$ はいくらですか。

$$f = \mu N \text{ に代入すると, } mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta \text{ したがって, } \tan \theta = \mu$$

(重要補足) 滑りだす直前の角度を「摩擦角」といいます。摩擦角 θ_0 とするとき成り立つ式「 $\tan \theta_0 = \mu$ 」は、意外と大切に知っている役に立つ関係式です。

③ 倒れるのか滑りだすのか、その条件は

(解答)

(1) 傾きを徐々に大きくしていくとき、先に倒れる場合に μ, a, b の間に成り立つ関係式を示しなさい。

θ が大きくなるにつれて $\tan \theta$ も大きくなるので、倒れる角度 $\tan \theta = \frac{a}{b}$ と滑る角度 $\tan \theta = \mu$ を比較して、

$$\frac{a}{b} < \mu$$

(2) 傾きを徐々に大きくしていくとき、先に滑りだす場合に μ, a, b の間に成り立つ関係式を示しなさい。

θ が大きくなるにつれて $\tan \theta$ も大きくなるので、倒れる角度 $\tan \theta = \frac{a}{b}$ と滑る角度 $\tan \theta = \mu$ を比較して、

$$\mu < \frac{a}{b}$$

<問題> 直方体(辺の長さ a, b) を水平な板に載せて、図のように水平に引きます。直方体と板との間の静止摩擦係数は μ とします。

引く力 F を徐々に大きくしていくときに、直方体が滑りだすよりも先に転倒するには μ, a, b の間に成り立つ条件式を示しなさい。

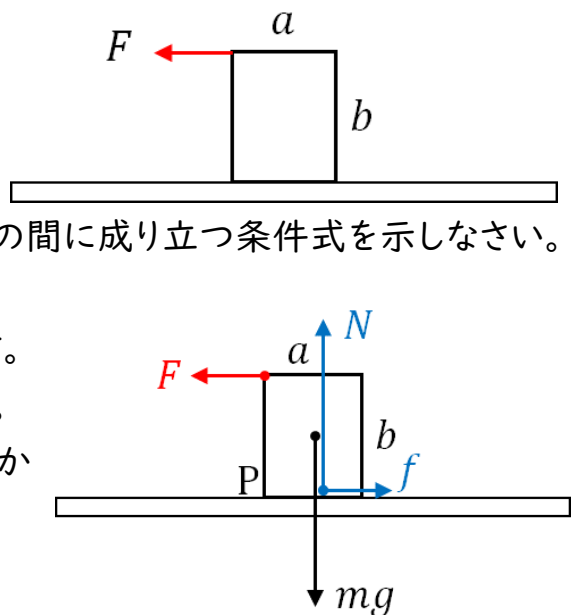
(解答)

まず、直方体にはたらく力を全部書いてみます。

つりあいの関係から、 $N = mg$, $f = F$ です。

滑りださない場合の F の限界値は、 $f \leq \mu N$ から、

$$F \leq \mu mg \text{ なので, } \mu mg \text{ となる。}$$



倒れない場合の F の限界値は、点Pのまわりの力のモーメントが0以下(時計回り)になればよい。ただ、このとき、倒れる直前には、垂直抗力も摩擦力も作用点はPにな

るので、垂直抗力と摩擦力の力のモーメントは含めません。もし、力のモーメントが負になれば、垂直抗力が生じて倒れないように頑張ってくれるわけです。

$Fb - mg \cdot \frac{a}{2} \leq 0$ から、 $F \leq \frac{a}{2b} mg$ なので限界値は $\frac{a}{2b} mg$ になる。

限界値がそれぞれ分かったので、次に直方体が滑りだすよりも先に転倒するには、先に転倒する限界値に達するということだと理解できます。

したがって条件は、 $\frac{a}{2b} mg < \mu mg$ となり、 $\mu > \frac{a}{2b}$ になります。

(重要補足)

転倒を始める状態は、基本的には力のモーメントの和から求めますが、次のように考えることもできます。

物体が面から受ける力以外の力の合力の作用線が回転軸になる点Pを通るときが

限界になります。これを、「合力の作用線が底面を通らなくなると倒れる」と言い換えることができます。逆に、「合力の作用線が底面を通る間は、垂直抗力と摩擦力がはたらいてつりあいを保つことができる」わけです。

さらに、もし限界状態のときに摩擦力が最大摩擦力を越えているということになっていれば、物体は滑ってしまっているわけです。

