

物を投げだしたとき、重力は鉛直方向にだけはたらくので、水平方向と鉛直方向に分けて運動を調べることができます。これが基本形です。

①基本の公式のおさらい

◇等速直線運動 $v = v_0 \quad x = v_0 t$

◇等加速度直線運動 $v = v_0 + at \quad y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
 $v^2 - v_0^2 = 2ax$

◇自由落下 $v = gt \quad y = \frac{1}{2}at^2$

下向き正 $v^2 = 2ay$

◇鉛直投げ下ろし $v = v_0 + gt \quad y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

下向き正 $v^2 - v_0^2 = 2gy$

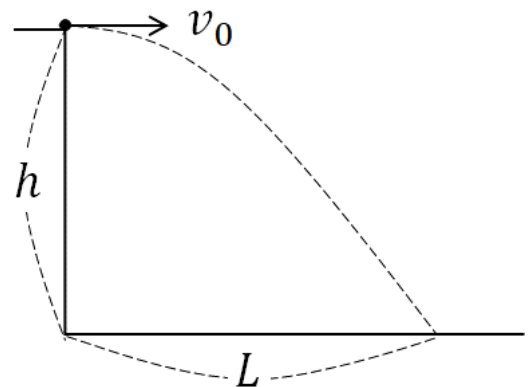
◇鉛直投げ上げ $v = v_0 - gt \quad y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

上向き正 $v^2 - v_0^2 = -2gy$

②水平投射はこれで解決

水平方向:等速直線運動 鉛直方向:自由落下運動

<問題>地上から高さ h の位置から、水平に速さ v_0 で小物体を投げ出しました。投射点から地上に落下する位置までの水平距離 L を求めなさい。重力加速度の大きさは g とします。



(解答例) 地上へ落下するまでの時間 t は自由落下で求めます。

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{から} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

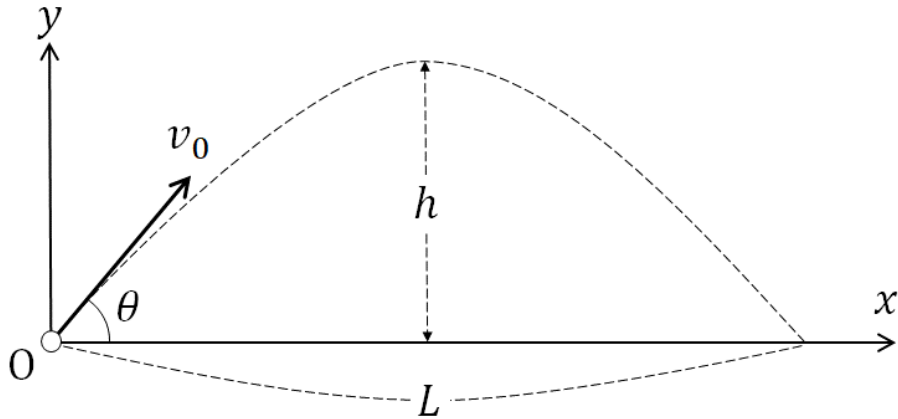
水平距離は速さ v_0 の等速直線運動で求めます。

$$L = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

③斜方投射はこのこの一題を完璧に

水平方向:等速直線運動 鉛直方向:鉛直上方投げ上げ運動

<問題>図のように,原点から小物体を水平から θ だけ上方に向けて速さ v_0 で投射しました。重力加速度の大きさは g とします。



(解答例)

(1) 初速度の x 成分と y 成分はいくらですか。

$$x \text{ 成分 } v_0 \cos \theta \quad y \text{ 成分 } v_0 \sin \theta$$

(2) 投射してから小物体が最高点に達するまでの時間はいくらですか。

y 成分について,鉛直投げ上げの式を適用する。最高点では,速度の y 成分は 0 である(速さは 0 ではなく, $v_0 \cos \theta$ である)。時間を t_1 とすると,

$$0 = v_0 \sin \theta - gt_1 \quad t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

(3) 最高点の高さ h はいくらですか。

$$h = v_0 \sin \theta \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

運動の対称性を利用して,時間 t_1 の自由落下で求めるとすばやくできます。

(4) 投射してから小物体がもとの高さに戻るまでの時間はいくらですか。

$$\text{求める時間を } t_2 \text{ とすると, 運動の対称性から, } t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

鉛直投げ上げの式を使う場合, $y = \dots$ から $0 = v_0 \sin \theta \cdot t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$ とすることが多いのですが, $v = \dots$ から $-v_0 \sin \theta = v_0 \sin \theta - gt_2$ とした方がとても簡単に求められます。

(5) 小物体の水平到達距離 L はいくらですか。

水平到達距離は速さ $v_0 \cos \theta$ の等速直線運動で求めます。

$$L = v_0 \cos \theta \cdot t_2 = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

(6) v_0 が一定のとき、水平到達距離 L は θ が何度のときに最大になりますか。ただし、 $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ であることを用いなさい。

与えられた式を用いると、 $L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

$0 < \theta < 90^\circ$ だから $0 < 2\theta < 180^\circ$ である。この範囲で $\sin 2\theta$ の最大値は、 $2\theta = 90^\circ$ のとき、つまり、 $\theta = 45^\circ$ のときに 1 になる。したがって、 L は θ が 45° のときに最大になる。

(7) 最大水平到達距離はいくらですか。

最大水平到達距離は、 $\frac{v_0^2}{g}$ である。

【補足】 $\sin 2\theta$ の値は $2\theta = 90^\circ$ を軸として対称的になっている。したがって、 $\theta = 45^\circ + \alpha$ で投射した場合と、 $\theta = 45^\circ - \alpha$ で投射した場合の水平到達距離は同じになります。