第5節

発例 9

力学的エネルギーとして，運動エネルギー，重力による位置エネルギー，ばねの弾性力による位置エネルギーののろつが全部登場します。
式が少し長くなりますが，難しくなったわけではありません。

① まず，力学的エネルギー保存則が成り立つことを宣言してから始めます。
② 重力による位置エネルギーの基準の高さを宣言する。

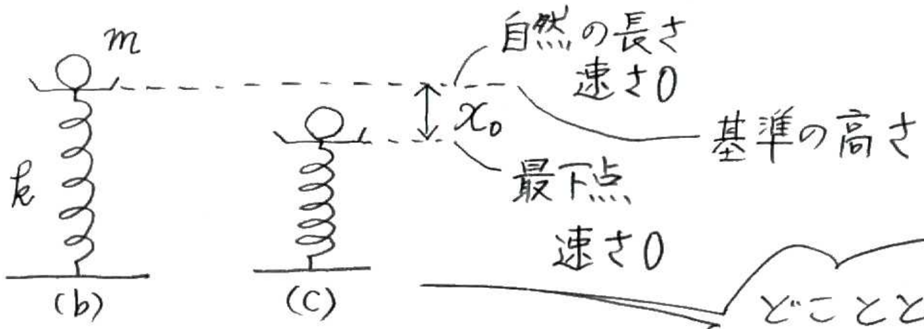
では，解き進めましょう。

物体にはたらく力は重力と弾性力だけなので力学的エネルギーが保存される。

厳密に言えば，物体には，弾性力が直接はたらくわけでなく，ばねにのせられた皿を介して皿から力を受けている。ここで，皿の質量が無視できることから，皿がばねから受ける弾性力と，物体が皿から受ける力は同じになる。こういった事情を，いちいち説明しているとかえって混乱するので，物体は弾性力を受けるといってしまうのが普通です。

あるいは，皿の質量は無視できるので，物体と皿を一体のものと考えてしまえば，無理なく納得できるかも‥‥。こっちの方がはるかにわかりますね。

(1) (b)と(c)で力学的エネルギー保存則が成り立つ。



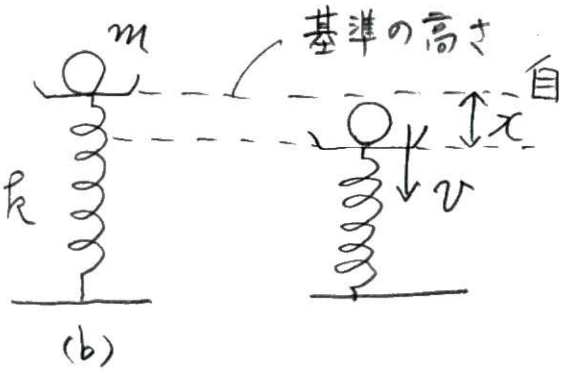
どことどこで比較するのかをはっきりと意識しましょう

$$0 = -mgx_0 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$0 = x_0\left(-mg + \frac{1}{2}kx_0\right)$$

$x_0 \neq 0$ なので、$x_0 = \dfrac{2mg}{k}$ Ans

(2)



(b)と自然の長さから x だけ下がったときの物体の速さを v として、力学的エネルギー保存則を用いる。

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

速さが最大になるということは、運動エネルギーが最大になるということ

$$= \frac{1}{2}k\left(x - \frac{mg}{k}\right)^2 - \frac{m^2g^2}{2k}$$

微分が簡単ですが、未習なら完全平方をつくりましょう

$\dfrac{mg}{k}$ 下がったところ Ans

発例10

動摩擦力がはたらく運動

↓（非保存力の代表的な力）

力学的エネルギーは保存されない

↓

動摩擦力が物体にした仕事の分だけ，力学的エネルギーが変化する。

⇒ ２通りの式の立て方があります。わかりやすい方でしっかりと式を書きましょう．

① 最初のM.E. ＋ 動摩擦力がした仕事 ＝ 最後のM.E.

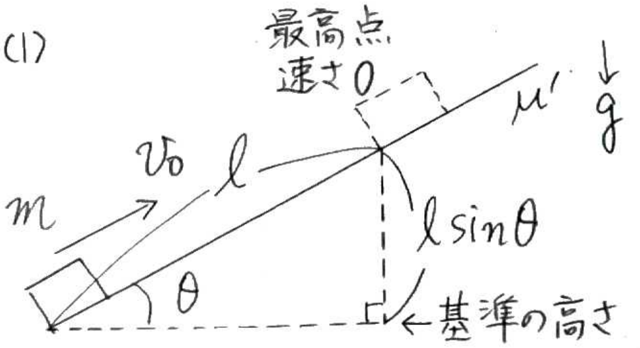
力学的エネルギー　　負になる

mechanical energy

② 最後のM.E − 最初のM.E. ＝ 動摩擦力がした仕事

まず，問題を読みながら，図を描いて，状況をつかみましょう。

(1)



下端と上端で力学的エネルギーの変化と動摩擦力がした仕事との関係は，下端を高さの基準として，

$$\underbrace{mgl\sin\theta}_{\text{最後}(mgh)} - \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{\text{最初}} = \underbrace{-\mu' mg\cos\theta \times l}_{(-\mu' N\cdot l)}$$

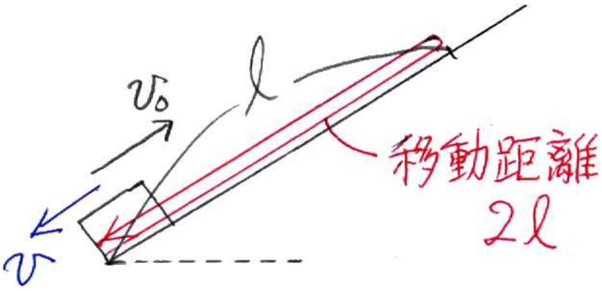
ここから，lを求めます。おちついて，わざとゆっくりとします。

$$\cancel{m}gl(\sin\theta+\mu'\cos\theta) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2$$

$$l = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}$$ Ans.

急ぐと，まちがえる人も結構多いので….

(2)



$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{最後}-\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{最初}=-\mu' mg\cos\theta\times 2l$$

$$v^2=v_0^2-4\mu' gl\cos\theta$$

$$v=\sqrt{v_0^2-4\mu' gl\cos\theta}$$

基本的にこれで正しいのですが，問題の指示だと，g，lが使えません。

そこで，(1)の結果を利用して，

$$gl=\frac{v_0^2}{2(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}$$ とおきかえます。

$$v=\sqrt{v_0^2-\frac{2\mu' v_0^2\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}}$$

もう少し，変形してみましょう。

$$=\sqrt{\frac{v_0^2\sin\theta+\mu' v_0^2\cos\theta-2\mu' v_0^2\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{v_0^2(\sin\theta-\mu'\cos\theta)}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}}$$

どっちを答えにしてもよいのです。

$$=v_0\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu'\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}}$$

Ans.

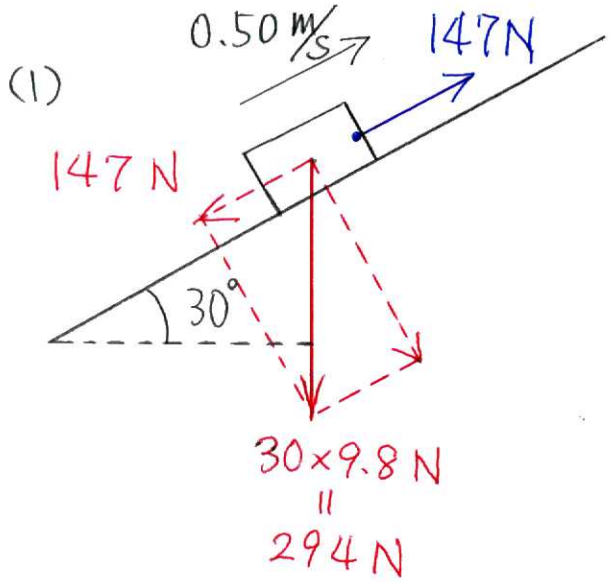
好みもあるでしょうが，こちらの方がスッキリしてそうなので，これを答えにしましょう。

答えにするなら，

$$v=v_0\sqrt{1-\frac{2\mu'\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}}$$ ぐらいにはしておきましょう。

発151

(1)

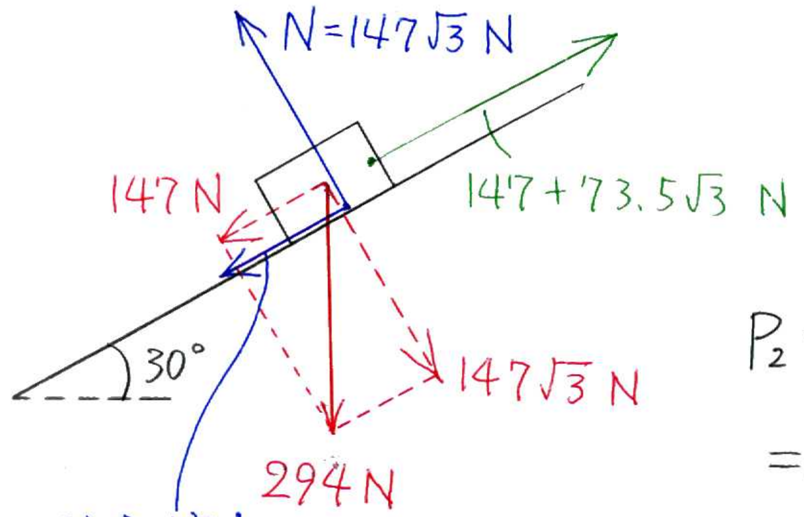


一定の速さで引き上げるのだから，引く力は，重力の斜面に平行な成分とつりあっている。

仕事率 $P = F \cdot v$ の関係を使ってみよう。

$P_1 = 147 \times 0.50 = 73.5\,\mathrm{W}$ $\underline{74\,\mathrm{W}}$ Ans.

(2) 動摩擦力が入って，つりあいを考えるので，頭の中を整理しよう。やっぱり図があった方がいいですね。



$\mu' N = 0.50 \times 147\sqrt{3}\,\mathrm{N}$

$= 73.5\sqrt{3}\,\mathrm{N}$

$P_2 = (147 + 73.5\sqrt{3}) \times 0.50$

$= (147 + 73.5 \times 1.73) \times 0.50$

$= (147 + 127) \times 0.50$

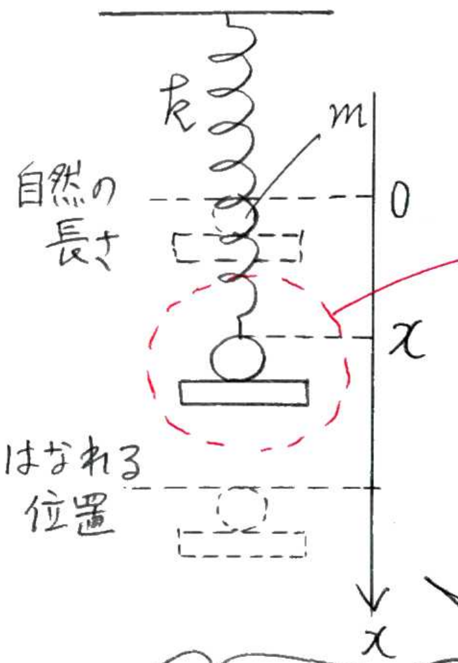
$= 137\,\mathrm{W}$

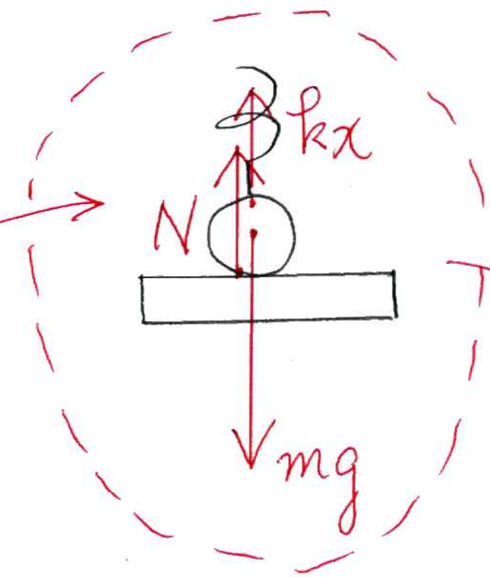
$\underline{1.4 \times 10^2\,\mathrm{W}}$ Ans.

発152

なんといろいろなことをまとめて問いにしていますね。まず，全体を読んで，大ざっぱに把握してから，各問題を考えることにしましょう。

(1)





図を1つにしてみましたが，力のようすまで書き込むと，ゴチャゴチャしそうなので，力の図は別にしました。

力の関係について

(1)の文中に「ゆっくりと下げ」と書いてあります。この「ゆっくりと」というのは，物理の業界用語です。業界用語集は，問題集の表見返しにあります。

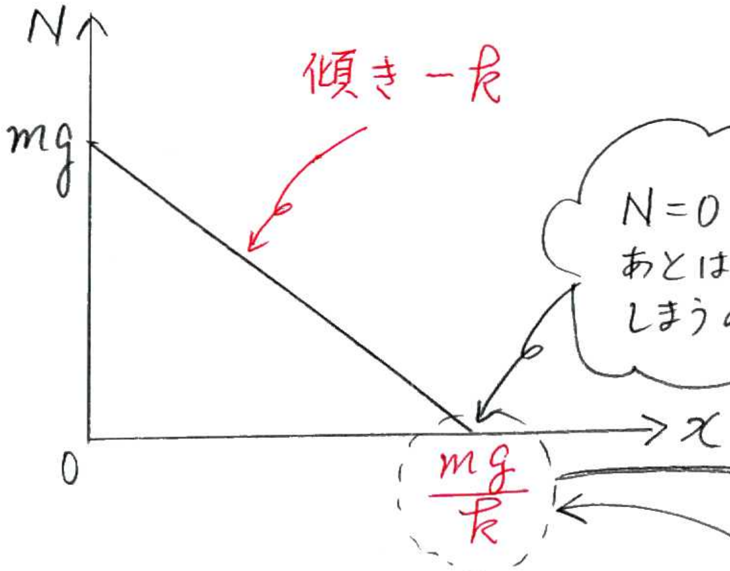
「ゆっくりと」…… 加速しないでという気持ちを含んでいるので，はたらく力はつりあっているとみなします。

力のつりあいから，

$$N + kx - mg = 0$$

$$N = -kx + mg$$

グラフにすると，



N=0 になるとあとははなれてしまうので，グラフはここまで

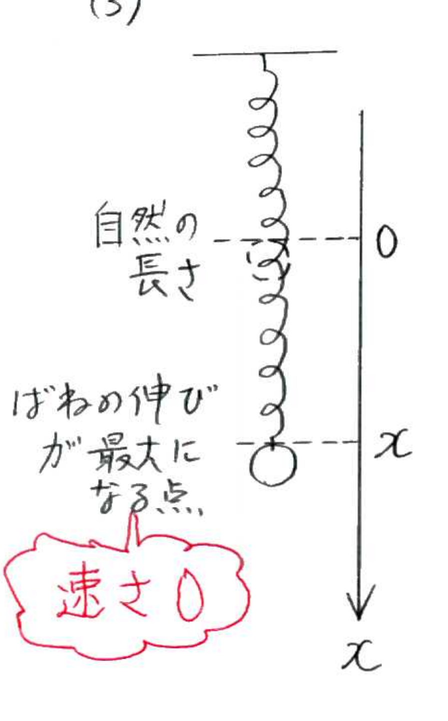
(2)で求めるので，(1)の答えとしては，なくてもよい。しかし，一般的には書いておく方がよい。

(2) N=0となる位置で離れるので，

$$0 = -kx + mg$$

$$x = \frac{mg}{k}$$ Ans.

(3)



自然の長さを基準の高さとして，自然の長さと伸びが最大の点との間で，力学的エネルギー保存則をかくと，

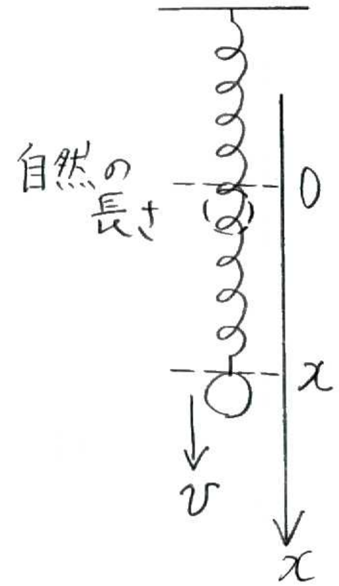
$$0 = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

これより，$x = 0$，$\frac{2mg}{k}$

$x=0$ は自然の長さの位置を示すので，不適である。

$$\frac{2mg}{k}$$ Ans

(4)



自然の長さの位置と，x の位置との間で力学的エネルギー保存則をかくと，

$$0=\frac{1}{2}mv^2-mgx+\frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2-mgx$$

速さが最大になるということは，運動エネルギーも最大なので，

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2-mgx$$

$$=\frac{1}{2}k\left(x-\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{(mg)^2}{2k}$$

平方完成のテクニックを使います。

$x=\dfrac{mg}{k}$ Ans　のとき，運動エネルギーは最大値 $\dfrac{(mg)^2}{2k}$ になる。

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{(mg)^2}{2k}$$ より

$$v^2=\frac{mg^2}{k}$$

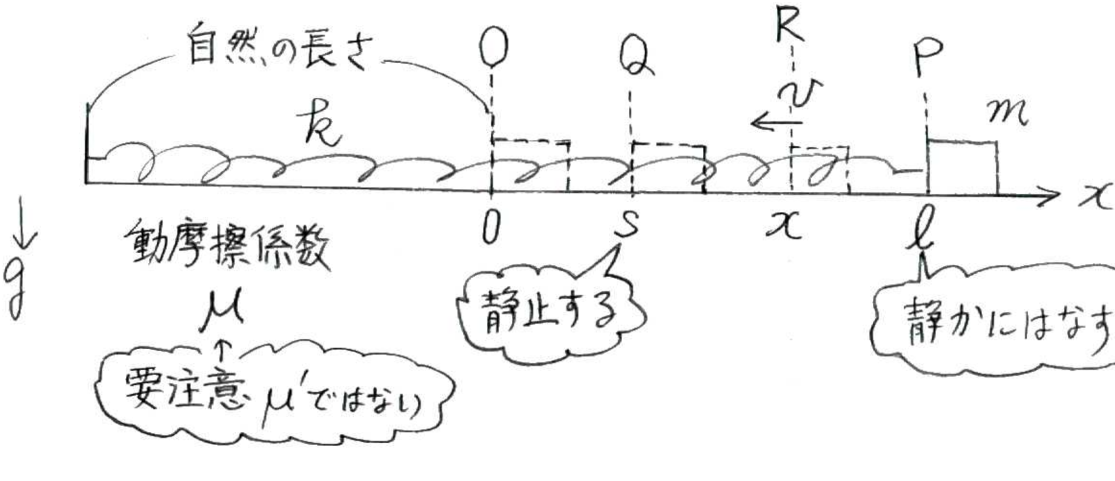
$$v=\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot g$$ Ans.

単純なことでも，組みあわさっていくにつれ複雑にみえてくる。

逆もまた真なり

複雑な難問も，要素に分解していけば，簡単になる。 ―ikeT

まず，問題の全体をよく読んで，頭をなじませよう。
図を描きながら，頭の中を整理しましょう。



皆さんも，自分なりの図を描きましょう。
これが大切

(1) $\frac{1}{2}kl^2$ Ans.

ばねにたくわえられている弾性エネルギー
物体がもつばねの弾性力による位置エネルギー
エネルギーのありかの考え方のちがいで表現は異なっているが，実は同じなのです。

(2) PとQの間で力学的エネルギーの変化は，この間に動摩擦力のする仕事に等しい。

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)}_{\text{最後の力学的エネルギー}}-\underbrace{\frac{1}{2}kl^2}_{\text{最初の力学的エネルギー}}=-\underbrace{\mu mg}_{\text{動摩擦力}}\underbrace{(l-x)}_{\text{すべった距離}}$$

動摩擦力は運動と逆向きにはたらいているので，仕事は負

上の式から，

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(l^2-x^2)-\mu mg(l-x)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}k(l+x)-\mu mg\right\}(l-x) \quad \text{Ans}$$

答えとしてはどちらでもかまわない。

どちらがスッキリしているかは人によって感じ方が異なっています。明らかにこちらでしょうという場合もあるわけで，その場合は，当然それにしましょう。

(3) 運動エネルギーが0になるときのxがsである。

(2)より，

$$0=\left\{\frac{1}{2}k(l+x)-\mu mg\right\}(l-x)$$

xにsを代入して式を解いてもよい。

$$x=\underbrace{l}_{\text{Pの位置なので不適}},\ \frac{2\mu mg}{k}-l \quad \text{Ans.}$$

(4) 運動エネルギーが最大になるxを求めればよい。

◎ $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(l^2-x^2)-\mu mg(l-x)$ から始めると、

平方完成へ

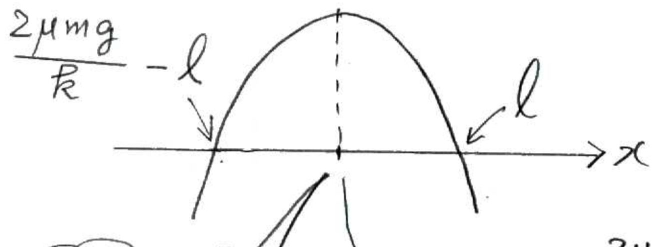
$$=-\frac{1}{2}kx^2+\mu mgx+\frac{1}{2}kl^2-\mu mgl$$

$$=-\frac{1}{2}k\left(x-\frac{\mu mg}{k}\right)^2+\frac{1}{2}kl^2-\mu mgl+\frac{(\mu mg)^2}{2k}$$

$\underline{x=\frac{\mu mg}{k}}$ Ans. のとき最大になる。

◎ $\frac{1}{2}mv^2=\left\{\frac{1}{2}k(l+x)-\mu mg\right\}(l-x)$ から始めると、

右辺はxについて2次関数でx^2の項の係数は$-\frac{1}{2}k$で負なのでグラフは下開きの放物線になっている。x軸との交点は、(3)からlと$\frac{2\mu mg}{k}-l$とわかっている。



中央で最大になる

$$\frac{l+\left(\frac{2\mu mg}{k}-l\right)}{2}=\underline{\frac{\mu mg}{k}}$$ Ans.

最大・最小問題は微分を学べば、とても簡単になります。

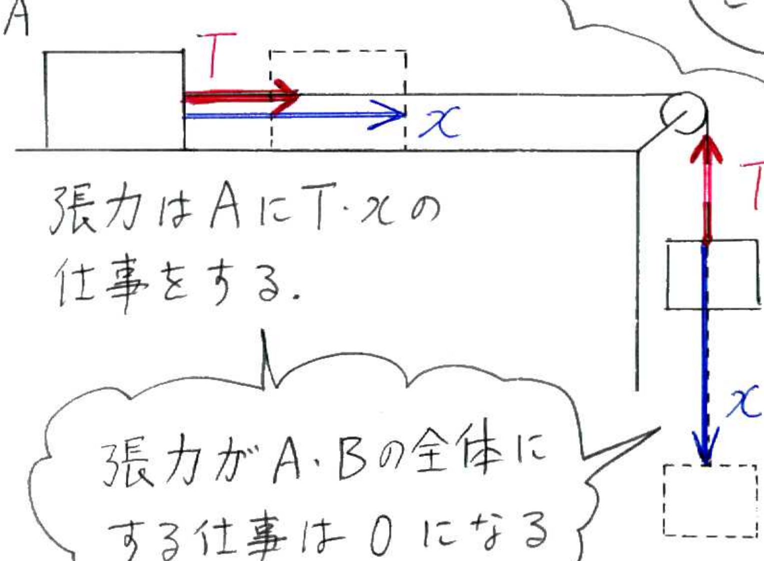
発想が理解できれば、頭の中で計算できてしまう人もいると思います。

この問題のテーマは，物体系における力学的エネルギーの活用です。

AとBをまとめて一つの物体系と考えましょう。すると，重力とばねの弾性力以外に，Aに動摩擦力がはたらき，力学的エネルギーは変化します。また，A，Bに糸の張力が仕事をするので，A，Bそれぞれの力学的エネルギーは変化します。

振り子のときの糸の張力は，張力の向きと物体の運動の向きが垂直なので，仕事をしません。

しかし，A，Bをあわせると，張力は力学的エネルギーを変化させません。



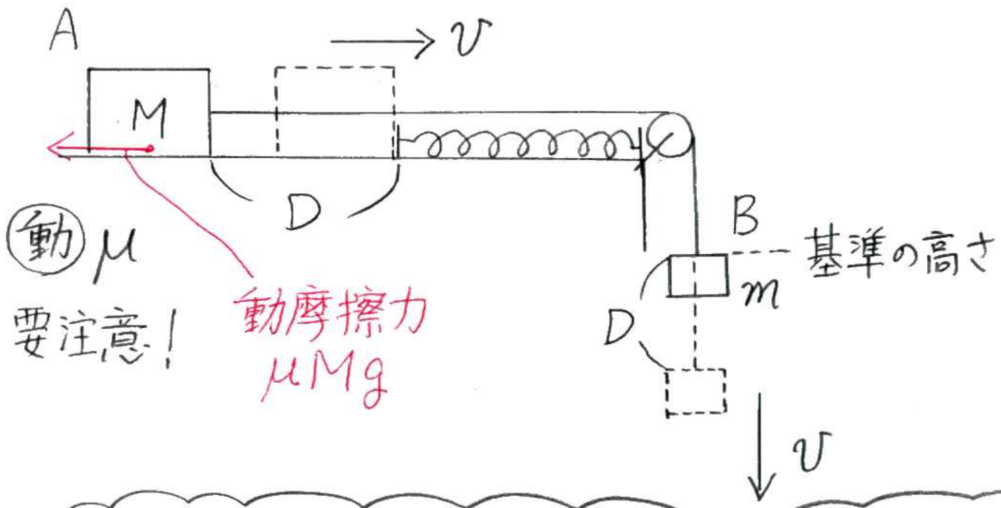
張力はAに$T \cdot x$の仕事をする．

張力はBに$-T \cdot x$の仕事をする

張力がA・Bの全体にする仕事は0になる

ばねを押し縮めている間は張力が変化するが，事情は同じで，張力がA・Bの全体にする仕事は0である。

(1)



Aは高さが変わらないので、Aの重力による位置エネルギーは考えなくてよい。

A, Bあわせた力学的エネルギーの変化が動摩擦力がした仕事に等しいから,

負の仕事

$$\left(\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv^2-mgD\right)-\underset{\text{最初}}{0}=-\mu MgD$$

0なので書かなくてもよい。

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv^2=mgD-\mu MgD$$

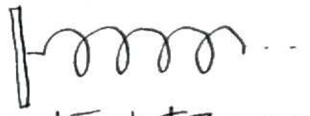
$$=\underline{(m-\mu M)gD}$$ Ans. 運動エネルギーの和

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2=(m-\mu M)gD$$

$$\underline{v=\sqrt{\frac{2(m-\mu M)gD}{M+m}}}$$ Ans. 速さ

(2) 軽いばねとの衝突では力学的エネルギーは失われません。

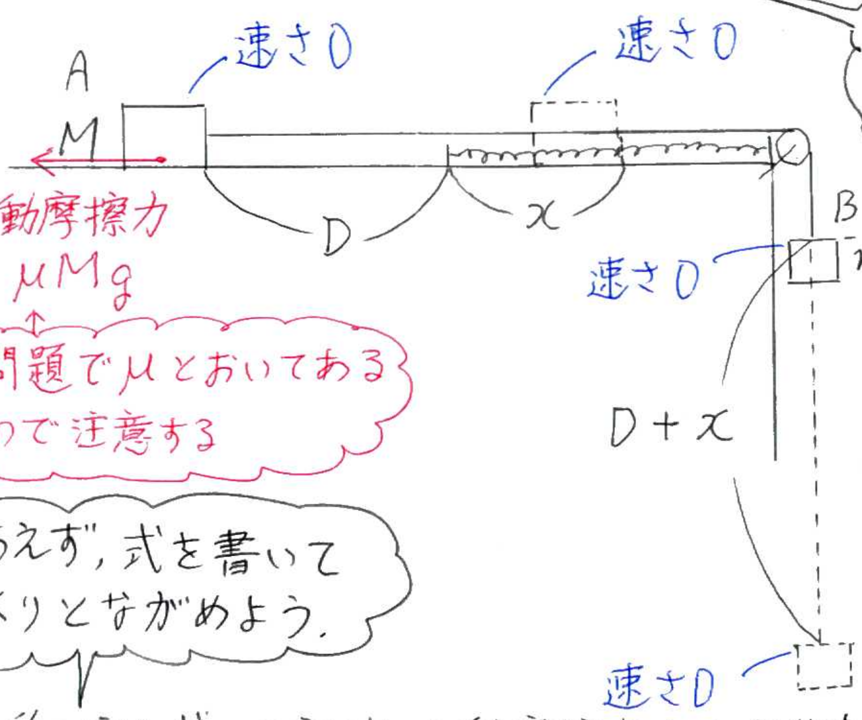
あまり強調されてない気がしますが，大切なことです。



この板も軽いとします。もし，板の質量が無視できなければ，「物理基礎」の範囲外ということになり，「物理」で学びます。

ばねの弾性力による位置エネルギーは，ばねが自然の長さからxだけ縮んだので $\frac{1}{2}kx^2$だけ変化する。

kは与えられていないので答えには使えない！



基準の高さ

問題でμとおいてあるので注意する

Aについては重力の位置エネルギーは考慮しなくてもよい。→同じ高さなので

とりあえず，式を書いてゆっくりとながめよう。

力学的エネルギーの変化は動摩擦力がした仕事に等しいから，

$$\underbrace{\frac{1}{2}kx^2 - mg(D+x)}_{\text{最後の力学的エネルギー}} - \underbrace{0}_{\text{最初の力学的エネルギー}} = -\mu Mg(D+x)$$

$\frac{1}{2}kx^2$ が知りたいので，

$\frac{1}{2}kx^2 = (m - \mu M)g(D + x)$ と変形すると，

右辺は答えに使ってよい文字ばかりですので
これを答えとします。

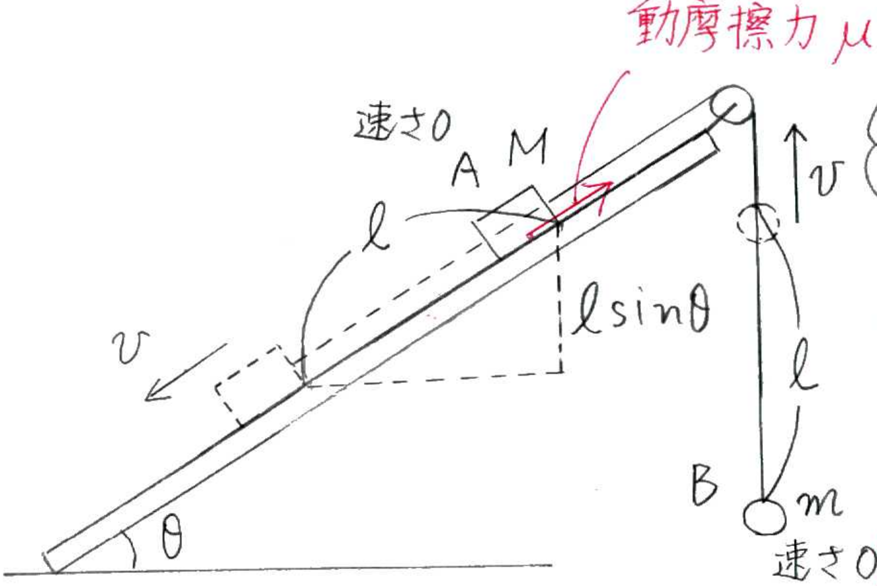
$$\underline{(m - \mu M)g(D + x)}_{\text{Ans}}$$

この問題は，内容としては，やるべきことがはっきりしていますが，(2)で使える文字をよく把握して，どう答えるのか，おちついて考えなければなりません。そういうことから，いきなりでは解けない人も多いと思います。ていねいにやっておきましょう。

自分できっちりやっておくと大丈夫です。

発155

この問題では，糸の張力がA，Bにする仕事の合計は0になるので， A，Bあわせた力学的エネルギーの変化量は動摩擦力がした仕事に等しくなっています。



慣れてきた人が多いと思うので説明抜きで一気に書きました。あやしい人は，図を書いて確認しておきましょう。

重力による位置エネルギーの基準の高さについて
やや変則ですが，A，Bそれぞれについて最初の高さを基準にしましょう。

力学的エネルギーの変化量が動摩擦力のした仕事に等しいので，

↓

$$\underbrace{\left\{\left(\frac{1}{2}Mv^2 - Mgl\sin\theta\right) + \left(\frac{1}{2}mv^2 + mgl\right)\right\}}_{\text{最後の力学的エネルギー}} - \underbrace{(0+0)}_{\text{最初の力学的エネルギー}} = -\mu' Mg\cos\theta \cdot l$$

(0なのでかかなくても可ですが −0とでもかいてあれば式の意味がはっきりします。)

vを求めます。

式を整理して解きます。

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2-(M\sin\theta-m)gl=-\mu' Mgl\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2=(M\sin\theta-m-\mu' M\cos\theta)gl$$

$$=\{M(\sin\theta-\mu'\cos\theta)-m\}gl$$

$$v=\sqrt{\frac{2\{M(\sin\theta-\mu'\cos\theta)-m\}gl}{M+m}}$$

Ans.

この形でなくても，そこそこすっきりした式になっていればよいのです。

(2)　(1)の結果をもとに計算すれば答えられるのでしょうが，考察で答えられるといいですね ☺

さあ考えてみましょう.

(考え中)

(2)について,

考察例①

Aだけについて考える。

Aには,重力以外にひもの張力と動摩擦力がはたらいて,ひもの張力と動摩擦力はどちらもAに対して負の仕事をするので,Aの力学的エネルギーは減少する。よって,ΔE_Aは負 Ans.

考察例②

AとBをあわせて考える。

動摩擦力が負の仕事をした分,AとBの力学的エネルギーの合計は減少するが,Bの力学的エネルギーは明らかに増加している。したがって,Aの力学的エネルギーは減少している。ΔE_Aは負 Ans.

考察例③

もし,計算してしまったらどうなるんでしょう。
(やりたくないけど,やってみるのもマニアックですね)

$$\Delta E_A = \left(\frac{1}{2}Mv^2 - Mgl\sin\theta\right) - 0$$

$$= \frac{1}{2}M \cdot \frac{2\{M(\sin\theta - \mu'\cos\theta) - m\}gl}{M+m} - Mgl\sin\theta$$

ΔE_Aの正・負・0の判定だけでよいので,全体をMglで割って計算を進めます。

$$\frac{\Delta E_A}{Mgl} = \frac{M(\sin\theta - \mu' \cos\theta) - m}{M+m} - \sin\theta$$

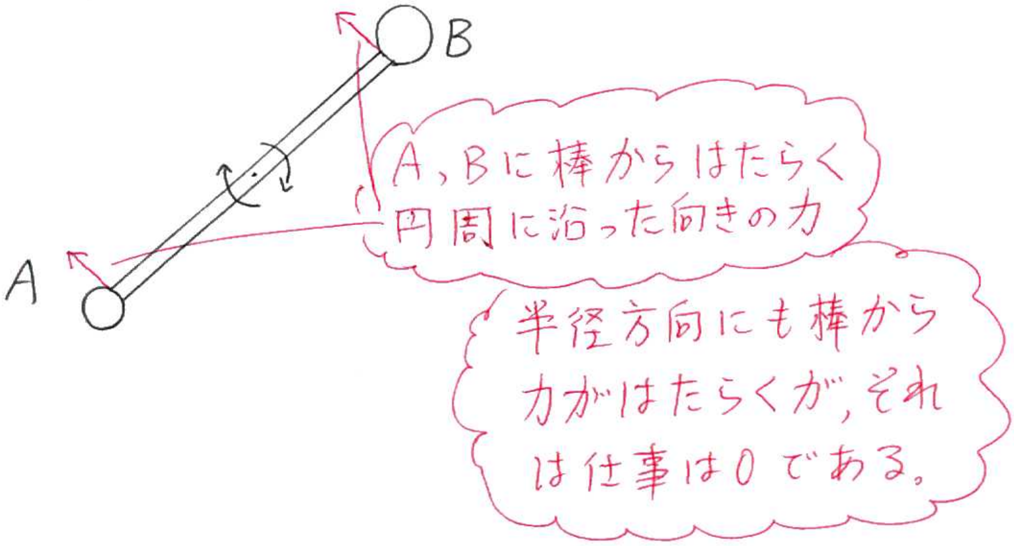
$$= \frac{\cancel{M\sin\theta} - \mu' M\cos\theta - m - \cancel{M\sin\theta} - m\sin\theta}{M+m}$$

$$= -\frac{\mu' M\cos\theta + m(1+\sin\theta)}{M+m} < 0$$

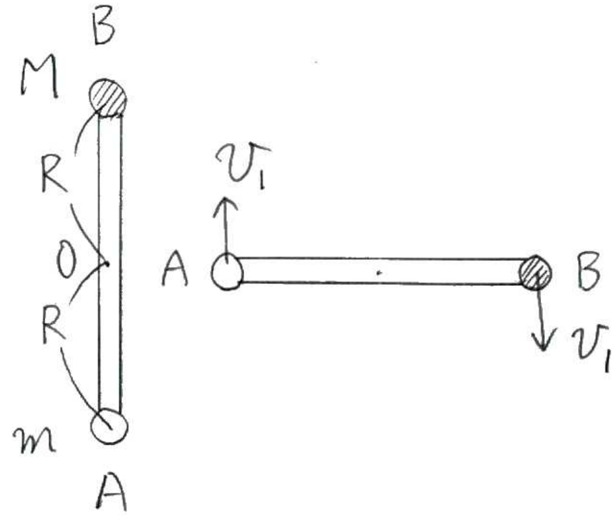
したがって、ΔE_Aは負 Ans

やってみたら意外と簡単にできましたね.

AとBを合わせた力学的エネルギーは保存される運動です。
A, Bそれぞれは，棒から力を受けて仕事をされるので，力学的エネルギーが変化します。



(1)



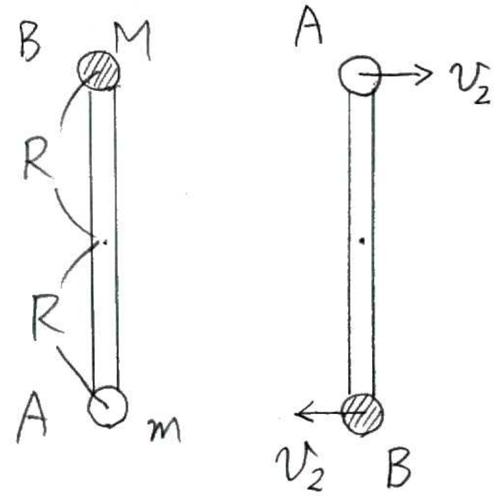
Oを基準の高さにして，力学的エネルギー保存則を適用すると，

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_1^2=-mgR+MgR$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2=(M-m)gR$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(M-m)gR}{m+M}}$$ Ans.

(2)



0を基準の高さにして，力学的エネルギー保存則を適用すると，

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgR + \frac{1}{2}Mv_2^2 - MgR = -mgR + MgR$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v_2^2 = 2(M-m)gR$$

$$v_2 = 2\sqrt{\frac{(M-m)gR}{m+M}}$$ Ans.